EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER MAASSFORMEN ([4], S. 7–10, [5], S. 26–30, [7], S. 269–277)

Im vorangegangen Vortrag hatten wir eine von Ramanujans Mock-Theta-Funktionen durch Addition einer nicht-holomorphen Korrektur-Funktion derart vervollständigt, dass die Vervollständigung den Transformationsgesetzen einer Modulform gehorcht. Die so vervollständigte Mock-Theta-Funktion nennt man eine *harmonische (schwache) Maassform*. Eine harmonische Maassform ist reel analytisch aber nicht zwingend holomorph. Wir führen daher die Variablen $u, v \in \mathbb{R}$ mit $\tau = u + iv \in \mathbb{H}$ ein. Harmonische Maassformen liegen im Kern des *hyperbolischen Laplace-Operators vom Gewicht* $2 - k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ $(k > 1)$

$$\Delta_{2-k} = -v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) + i(2-k)v \left(\frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Definieren Sie in Ihrem Vortrag harmonische Maassformen ([5], S. 27). Eine harmonische Maassform $\mathcal{M}$ ist invariant unter $\tau \to \tau + 1$ und besitzt daher eine Fourierreihe

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(v) e^{2\pi i n u}. \tag{1}$$

Wir schreiben die Fourierreihe (1) wie folgt um: $(b_n(v) = e^{2\pi n v} a_n(v),\ q = e^{2\pi i \tau})$

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n(v) q^n.$$

Für festes u ist die Differentialgleichung $\Delta_{2-k}(b_n(v)q^n) = 0$ linear von 2. Ordnung und hat höchstens zwei linear unabhängige Lösungen. Falls $n \neq 0$ ist, so ist $b_n(v)$ eine Linearkombination von 1 und $\Gamma(k-1, -4\pi n v)$. Hierin ist (für $v > 0,\ s \in \mathbb{C}$ oder $v \leq 0,\ \mathrm{Re}(s) > 0$)

$$\Gamma(s; v) = \int_v^\infty t^{s-1} e^{-t} dt$$

die *unvollständige Gammafunktion*. Im Fall $n = 0$ ist $b_n(v)$ ein Linearkombination von 1 und v^{k-1}. Nach Definition von harmonischen Maassformen gibt es ein Polynom in q^{-1} $(n_0 \in \mathbb{Z})$

$$P_{\mathcal{M}}\left(q^{-1}\right) = \sum_{n_0 \leq n \leq 0} c_{\mathcal{M}}^+(n) q^n,$$

so dass die Funktion

$$\mathcal{M}(\tau) - P_{\mathcal{M}}\left(q^{-1}\right)$$

für $\tau \to i\infty$ exponentiell abklingt. Zeigen Sie hieraus, dass die Fourierreihe von $\mathcal{M}$ folgende Form hat:

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{n \geq n_0} c_{\mathcal{M}}^+(n) q^n + \sum_{n < 0} c_{\mathcal{M}}^-(n) \Gamma(k-1; 4\pi |n| v) q^n$$

(s. S. 7–10 in [4], beachten Sie die asymptotische Formel (6.5.32) aus [1]). Hierin sind $c_{\mathcal{M}}^+(n)$ und $c_{\mathcal{M}}^-(n) \in \mathbb{C}$ unabhängig von τ. Den ersten Summanden

$$\sum_{n \geq n_0} c_{\mathcal{M}}^+(n) q^n$$

nennen wir den *holomorphen Anteil* von $\mathcal{M}$. Den zweiten Summanden

$$\sum_{n<0} c_{\mathcal{M}}^{-}(n)\Gamma\left(k-1; 4\pi|n|v\right) q^n$$

nennen wir den *nicht-holomorphen Anteil* von $\mathcal{M}$.

Im zweiten Teil des Vortrages sollen Sie zeigen, dass Ramanujans Mock-Theta-Funktion

$$f(\tau) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{q^{n^2}}{(1+q)^2\left(1+q^2\right)^2 \cdots \left(1+q^n\right)^2}$$

zu einer harmonischen Maassform vervollständigt werden kann. Das Transformationsgesetz, welches wir bereits im vorangegangenen Vortrag bewiesen hatten, leiten wir hierbei auf einem anderen Weg erneut her. Watson [6] stellte mittels eines gewissen Transformationsgesetzes eine Beziehung zwischen f und einer weiteren Mock-Theta-Funktion ω her. Der Vektor

$$\mathcal{F}(\tau) = \left(q^{-\frac{1}{24}} f(\tau), 2q^{\frac{1}{3}}\omega\left(\frac{\tau}{2}\right), 2q^{\frac{1}{3}}\omega\left(\frac{\tau+1}{2}\right)\right)$$

ist nun eine sogenannte *vektorwertige Mock-Modulform*, d.h. es gibt eine *vektorwertige harmonische Maassform* $\widehat{\mathcal{F}}$, so dass die Komponenten von $\mathcal{F}$ die holomorphen Anteile der Komponenten von $\widehat{\mathcal{F}}$ sind (s. S. 440–441 in [3] für eine Definition). Formulieren Sie ohne Beweis eine vektorwertige Version von Watson's Transformationsgesetz. Zeigen Sie dann, wie Zwegers [7] dieses Transformationsgesetz anwendete, um den Vektoren $\mathcal{F}$ zu einer reel analytischen vektorwertigen Modulform zu ergänzen. Wir konstruieren nun aus dieser vektorwertigen Modulform eine harmonische Maassform. Dazu sei

$$\widehat{F_0}(\tau) = q^{-1} f(24\tau) - 12i\sqrt{2}\int_{-\overline{\tau}}^{i\infty} \frac{g(24z)}{\sqrt{-i(z+\tau)}} dz.$$

Hierin ist g die unäre Thetareihe

$$g(\tau) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(n+\frac{1}{6}\right) e^{3\pi i\left(n+\frac{1}{6}\right)^2\tau}.$$

Beweisen Sie nun folgenden Satz.

Satz 1. *Die Funktion $\widehat{F_0}(\tau)$ ist eine harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{1}{2}$.*

Erklären Sie die Grundgedanken des Beweises von Korollar 2.3 in [2] und zeigen Sie, dass für alle $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $144 \mid c$ gilt:

$$\widehat{F_0}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \left(\frac{12c}{d}\right)\varepsilon_d^{-1}\left(c\tau+d\right)^{\frac{1}{2}}\widehat{F_0}(\tau).$$

Die hierin verwendeten Bezeichnungen wurden im zweiten Vortrag eingeführt.

Zeigen Sie dann

$$\Delta_{\frac{1}{2}}\left(\widehat{F_0}(\tau)\right) = 0$$

und beenden Sie so den Beweis von Satz 1.

Literatur

[1] M. Abromowitz, I. Stegun, Handbook of mathematical functions, Dover Publications, New York, 1972, 1–1043.

[2] K. Bringmann, K. Ono, *The $f(q)$ mock theta function conjecture and partition ranks*, Invent. Math. **165**, 2006, 243–266.

[3] K. Bringmann, K. Ono, *Dyson's ranks and Maass forms*, Ann. of Math. **171** (2010), 419–449.

[4] R. Bruggeman, Families of automorphic forms, Birkhäuser, Basel, 1994.

[5] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory,* in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.

[6] G. Watson, *The final problem: an account of the mock-theta functions*, J. London Math. Soc. **11**, 1936, 55–80.

[7] S. Zwegers, *Mock theta functions and real analytic modular forms,* in q-series with applications to combinatorics, number theory, and physics (Ed. B. C. Berndt, and K. Ono), Contemp. Math **291**, 2001, 269–277.