HARMONISCHE MAASSFORMEN UND MODULFORMEN ([1], S. 90–92, [2], S. 90–92, [3], S. 30–31)

Im vorangegangenen Vortrag hatten wir harmonische (schwache) Maassformen eingeführt. In diesem Vortrag sollen Sie gewisse Differentialoperatoren ξ_{2-k} untersuchen, die den Raum der harmonischen Massformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k abbilden. Es sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Wir definieren ($\tau = u + iv \in \mathbb{H}$, $u, v \in \mathbb{R}$, $v > 0$)

$$\xi_{2-k} = 2iv^{2-k}\overline{\frac{\partial}{\partial\overline{\tau}}}.$$

Wir hatten bereits gesehen, dass eine harmonische Maassform $\mathcal{M}$ vom Gewicht $2-k$ eine Fourierreihe der Form ($q = e^{2\pi i\tau}$)

$$\mathcal{M}(\tau) = \sum_{n \geq n_0} c_f^+(n)q^n + \sum_{n<0} c_f^-(n)\Gamma\left(k-1; 4\pi|n|v\right)q^n$$

hat. Hierin ist ($v > 0$, $s \in \mathbb{C}$)

$$\Gamma\left(s; v\right) = \int_v^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$$

die unvollständige Gammafunktion. Zeigen Sie, dass ξ_{2-k} eine Maassform $\mathcal{M}$ vom Gewicht $2-k$ auf die holomorphe Funktion

$$\xi_{2-k}\left(\mathcal{M}(\tau)\right) = -\left(4\pi\right)^{k-1}\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{c_f^-(-n)}n^{k-1}q^n \tag{1}$$

abbildet. Modifizieren Sie nun die Rechnung auf S. 90–92 in [1], um zu zeigen ($\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$):

$$\xi_{2-k}\left(\mathcal{M}\big|_{2-k}\gamma\right) = \xi_{2-k}\left(\mathcal{M}\right)\big|_k\gamma.$$

Schließen Sie hieraus:

Lemma 1 (Lemma 7.4 in [3])**.** *Der Operator ξ_{2-k} bildet den Raum der Maassformen vom Gewicht $2-k$ in den Raum der Spitzenformen vom Gewicht k ab.*

Eine harmonische Maassform, deren nicht-holomorpher Anteil verschwindet, nennen wir *schwach holomorphe Modulform.* Aus (1) folgt, dass die nicht-holomorphen Anteile zweier harmonischer Maassformen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$, für die $\xi_{2-k}\left(\mathcal{M}_1\right) = \xi_{2-k}\left(\mathcal{M}_2\right)$ gilt, übereinstimmen. Es folgt:

Satz 2. *Es seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ harmonische Maassformen vom Gewicht $2-k$ mit*

$$\xi_{2-k}\left(\mathcal{M}_1\right) = \xi_{2-k}\left(\mathcal{M}_2\right).$$

Dann ist $\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$ eine schwach holomorphe Modulform vom Gewicht $2-k$.

Tragen Sie schließlich folgendes Beispiel vor. Es sei $H(n)$ die sog. *Hurwitzsche Klassenzahl* (s. S. 8, 73 in [4], Sie brauchen in Ihrem Vortrag nicht auf die Hurwitzsche Klassenzahl einzugehen). Für $n \equiv 0, 1 \pmod 4$, $n > 0$ ist dies im Wesentlichen die Anzahl der Äquivalenzklassen binärer quadratischer Formen

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

mit Diskriminante $b^2 - 4ac = n$. Hirzebruch und Zagier [2] zeigten, dass die erzeugende Funktion

$$G(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} H(n) e^{2\pi i n \tau} + \frac{1}{8\pi\sqrt{v}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \Gamma\left(-\frac{1}{2}; 4\pi n^2 v\right) q^{-n^2}$$

eine harmonische Maassform vom Gewicht $\frac{3}{2}$ ist. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ gibt, so dass

$$c\, \xi_{\frac{3}{2}}\left(G(\tau)\right) = \Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}$$

gilt. Die Funktion Θ ist eine der unären Thetareihen vom Gewicht $\frac{1}{2}$, die wir im zweiten Vortrag eingeführt hatten.

Literatur

[1] D. Goldfeld, J. Hundley, Automorphic representations and L-functions for the general linear group, Cambridge studies in advanced mathematics **129**, 2011, 1–550.

[2] F. Hirzebruch, D. Zagier, *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms with Nebentypus,* Invent. Math. **36**, 1976, 57–113.

[3] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory,* in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.

[4] Zagier, D., *Elliptic modular forms* in Bruinier, J.H., van der Geer, G., Harder, G., Zagier, D., The 1-2-3 of Modular Forms, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 1–104.