

**POINCARÉSCHE REIHEN** ([1], S. 600–602, [2], S. 27–28, [3], S. 39–41, 47–51, [4], S. 54–55, [5], S. 337–340)

In diesem Vortrag sollen Sie eine Familie von Maassformen vom Gewicht  $2 - k \in \mathbb{Z}$  konstruieren. Die Grundidee ist dabei, eine Funktion  $\varphi \in \text{Kern}(\Delta_{2-k})$  zu wählen und dann eine Art Durchschnitt von  $\varphi|_{2-k}\gamma$  ( $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ) zu bilden. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Konvergenz der so erhaltenen Reihe, wird diese dann nach Konstruktion das modulare Transformationsgesetz erfüllen und im Kern von  $\Delta_{2-k}$  liegen. Wir beschreiben dies nun genauer.

Es sei  $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die invariant unter  $\tau \rightarrow \tau + 1$  ist. Wir definieren ( $\tau \in \mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(\tau) > 0\}$ )

$$(1) \quad P_{\varphi, 2-k}(\tau) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} \varphi|_{2-k}\gamma(\tau).$$

Hierin ist

$$\Gamma_{\infty} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Summe läuft über ein Vertretersystem der Rechtsnebenklassen von  $\Gamma_{\infty}$  in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ . Wir nehmen an, dass die Summe (1) absolut konvergent ist. Zeigen Sie, dass dann  $P_{\varphi, 2-k}$  wohldefiniert ist und dem modularen Transformationsgesetz vom Gewicht  $2 - k$  gehorcht (s. S. 47–51 in [3]).

Wir setzen nun ( $m \in \mathbb{N}$ ,  $\tau = u + iv$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ ,  $v > 0$ )

$$\psi_m(v) = (4\pi|m|v)^{\frac{k}{2}-1} M_{(1-\frac{k}{2})\text{sgn}(m), \frac{k-1}{2}}(4\pi|m|v),$$

$$\varphi(\tau) = \varphi_m(\tau) = \psi_m(v)e^{2\pi imu}.$$

Hierin ist  $M_{\nu, \mu}(v)$  eine Lösung der *Whittakerschen Differentialgleichung* ([5], S. 337–340)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) u = 0,$$

die für  $v \rightarrow 0$  folgende asymptotische Wachstumsbedingung erfüllt:

$$M_{\nu, \mu}(|v|) = O\left(|v|^{\text{Re}(\mu + \frac{1}{2})}\right).$$

Zeigen Sie wie in [2], ohne aber (1.29), (1.30) und (1.31) nochmals zu beweisen: ( $q = e^{2\pi i\tau}$ ):

$$(2) \quad \varphi_m(\tau) = (k-1) (\Gamma(k-1) - \Gamma(k-1; 4\pi mv)) q^{-m}.$$

Hierin ist  $\Gamma(s; v)$  die unvollständige Gammafunktion ( $v > 0$ ,  $s \in \mathbb{C}$ )

$$\Gamma(s; v) = \int_v^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

und  $\Gamma(s)$  die gewöhnliche Gammafunktion. Verwenden Sie die Darstellung (2) von  $\varphi_m$  und zeigen Sie  $\Delta_{2-k}(\varphi_m) \equiv 0$ . Beweisen Sie dann, dass für eine beliebige reel analytische Funktion  $f$  gilt: ( $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ )

$$\Delta_{2-k}(f)|_{2-k}\gamma = \Delta_{2-k}\left(f|_{2-k}\gamma\right).$$

Man kann hieraus zeigen, dass mit  $\varphi_m$  auch  $P_{\varphi_m, 2-k}$  im Kern von  $\Delta_{2-k}$  liegt, falls die Reihe (1) lokal gleichmäßig konvergiert.

Zeigen Sie schließlich, dass für unsere Wahl der  $\varphi_m$  die Reihe (1) absolut und lokal gleichmäßig konvergiert, falls  $2 - k < \frac{1}{2}$  (oder äquivalent  $k > \frac{3}{2}$ ) gilt. Sie können hierzu Proposition 2.9 aus [3] ohne Beweis benutzen. Es folgt:

**Satz 1.** *Es sei  $\frac{3}{2} > k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Dann ist die Poincarésche Reihe  $P_{\varphi_m, 2-k}$  eine Maassform vom Gewicht  $2 - k$ .*

#### LITERATUR

- [1] K. Bringmann, K. Ono, *Arithmetic properties of coefficients of half-integral weight Maass-Poincaré series*, Math. Ann. **337** (2007) 591–621.
- [2] J. Bruinier, *Borchers products on  $O(2,1)$  and Chern classes of Heegner divisors*, Springer Lect. Notes Math. **1780** Springer-Verlag, 2002, Berlin.
- [3] H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Graduate studies in Mathematics **17**, American Mathematical Society, 1997, 1–261.
- [4] K. Ono, *Unearthing the visions of a master: harmonic Maass forms and number theory*, in Proceedings of the 2008 Harvard-MIT current developments in mathematics conference, International Press, Somerville, MA, 2009, 374–454.
- [5] E. Whittaker, G. Watson, *A course in modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.