SIEB-OPERATOREN, SUMMEN VON DREI QUADRATEN UND KLASSENZAHLEN ([1], CHAPTER 2, [2], S. 53)

In Ihrem Vortrag soll der Sieb-Operator auf harmonischen Maassformen eingeführt werden und als Anwendung ein Satz von Gauss bewiesen werden, der die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von drei Quadraten mit Klassenzahlen in Verbindung bringt.

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine 1-periodische Funktion mit Fourier-Reihe $f(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_v(n)q^n$, wobei $\tau = u + iv \in \mathbb{H}$ und $q = e^{2\pi i\tau}$. Wir definieren den *Sieb-Operator* $S_{N,r}$ durch

$$f|S_{N,r}(\tau) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ n\equiv r \pmod N}} a_v(n)q^n.$$

Schreiben Sie den Sieb-Operator als Kombination von Strich-Operatoren: Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $\zeta_N = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ gilt

$$f|S_{N,r} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta_N^{-\ell r} f\Big|_k \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definieren Sie die folgenden (Kongruenz-)Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_1(M) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod M \right\},$$

$$\Gamma_0(M) = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod M \right\}.$$

Zeigen Sie dann die folgende Behauptung.

Satz 1. *Seien $N \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_0, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $\Gamma \in \{\Gamma_1(M), \Gamma_0(M)\}$ für ein $M \in \mathbb{N}$. Weiter bezeichne $H_k(\Gamma)$ den $\mathbb{C}$-Vektorraum der harmonischen schwachen Massformen vom Gewicht k zur Gruppe Γ. Dann ist die Abbildung*

$$S_{N,r} : H_k(\Gamma) \to H_k\left(\widetilde{\Gamma}\right),\ f \mapsto f|S_{N,r}$$

wohldefiniert, wobei

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma_0\left(N^2\right) \cap \Gamma_1(N) \cap \Gamma.$$

Es sei nun ($n \in \mathbb{N}$)

$$r_3(n) = \#\left\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \middle| a^2 + b^2 + c^2 = n\right\}$$

die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von drei Quadraten. Desweiteren sei $H(n)$ die n-te *Hurwitz-Klassenzahl*. Sie ist definiert als die Anzahl der Äquivalenzklassen ganzzahliger, binärer quadratischer Formen mit Diskriminante $-n$, wobei die Äquivalenzklassen, die die Form $a(x^2 + y^2)$ (bzw. $a(x^2 + xy + y^2)$) enthalten mit einem Faktor $\frac{1}{2}$ (bzw. $\frac{1}{3}$) gewichtet werden. Es stellt sich zudem als praktisch heraus, $H(0) = -\frac{1}{12}$ zu definieren.

Beweisen Sie durch Anwendung von Satz 1 auf die harmonische schwache Maassform

$$\widehat{\mathscr{H}}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} H(n)q^n + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} n\Gamma\left(-\frac{1}{2}; 4\pi n^2 v\right) q^{-n^2} + \frac{1}{8\pi\sqrt{v}}$$

folgenden Zusammenhang zwischen $r_3(n)$ und $H(n)$, wobei $\Gamma(s;v)$ die im sechsten Vortrag eingeführte unvollständige Gammafunktion ist.

Satz 2 (C. F. Gauß, 1801). *Für jede natürliche Zahl n gilt*

$$r_3(n) = \begin{cases} 12H(4n) & \text{falls } n \equiv 1,2 \pmod 4, \\ 24H(n) & \text{falls } n \equiv 3 \pmod 8, \\ 0 & \text{falls } n \equiv 7 \pmod 8, \\ r_3\left(\frac{n}{4}\right) & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 4. \end{cases}$$

Leiten Sie hierfür zunächst folgendes Korollar aus Satz 1 her.

Korollar 3. *Seien $N, r \in \mathbb{N}$ so, dass die Kongruenz $x^2 \equiv -r \pmod N$ nicht lösbar ist. Dann ist die Funktion $\mathscr{H}_{N,r} = \widehat{\mathscr{H}}|S_{N,r}$ eine (holomorphe) Modulform vom Gewicht $\frac{3}{2}$ zur Gruppe $\Gamma = \Gamma_0(N^2) \cap \Gamma_1(N) \cap \Gamma_0(4)$.*

Als nächstes betrachen wir die klassische Thetareihe des Gitters $\mathbb{Z}$

$$\Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}.$$

Dann ist

$$\Theta^3(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} r_3(n) q^n = 1 + 6q + 12q^2 + 8q^3 + 6q^4 + 24q^5 + 24q^6 + 12q^8 + O\left(q^9\right).$$

Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\Theta \in M_{\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$ liegt. Es folgt $\Theta^3 \in M_{\frac{3}{2}}(\Gamma_0(4))$. Den Beweis von Satz 2 kann man nun folgendermaßen führen: Wir wählen $N = 8$ in Korollar 3. Dann haben wir die Möglichkeiten $r = 1, 2, 3, 5, 6$, so dass $\Theta^3|S_{8,r}$ und $\mathscr{H}_{8,r}$ beides Modulformen vom Gewicht $\frac{3}{2}$ bezüglich $\Gamma = \Gamma_0(64) \cap \Gamma_1(8)$ sind (beachten Sie, dass $\Gamma_0(64) \subseteq \Gamma_0(4)$). Der Index dieser Gruppe ist $[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] = 384$ (Beweis ist nicht erforderlich) und mit einem Satz von Sturm (siehe [2], Theorem 3.13) erhält man dann, dass wir die Identitäten aus den entsprechenden Fällen in Satz 2 nur für $n \leq 48$ nachprüfen müssen. Hierzu finden sich die ersten 200 Fourier-Koeffizienten von $\mathscr{H}$ und Θ^3 in der Tabelle im Anhang.

Die verbleibenden Fälle ($n \equiv 0, 4, 7 \pmod 8$) kann man mit elementarer Zahlentheorie erledigen.

Beweis von Lemma 1

Beweis von Lemma 1. Sei $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{\Gamma}$. Für $0 \leq \ell < N$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a + \frac{\ell}{N}c & b - \frac{\ell}{N}(a-d) + \frac{\ell^2}{N^2}c \\ c & d - \frac{\ell}{N}c \end{pmatrix}.$$

Man prüft unmittelbar nach, dass diese Matrix wieder in $\widetilde{\Gamma}$ liegt. Insbesondere lässt sich jedes $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$ in der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \widetilde{\gamma}_\ell \left(\begin{smallmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ mit $\widetilde{\gamma}_\ell \in \widetilde{\Gamma}$ schreiben.

Deswegen gilt

$$f\Big|S_{N,r}\Big|_k \gamma = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta_N^{-\ell r} f\Big|_k \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \widetilde{\gamma}_\ell \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta_N^{-\ell r} f\Big|_k \widetilde{\gamma}_\ell \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weil $f \in H_k(\Gamma)$ und $\widetilde{\gamma}_\ell \in \widetilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$ ist, gilt

$$\frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta_N^{-\ell r} f\Big|_k \gamma_\ell \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \zeta_N^{-\ell r} f\Big|_k \begin{pmatrix} 1 & \frac{\ell}{N} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f\Big|S_{N,r}.$$

$\square$

Fourier-Koeffizienten

n	$r_3(n)$	$H(n)$
1	6	0
2	12	0
3	8	1/3
4	6	1/2
5	24	0
6	24	0
7	0	1
8	12	1
9	30	0
10	24	0
11	24	1
12	8	4/3
13	24	0
14	48	0
15	0	2
16	6	3/2
17	48	0
18	36	0
19	24	1
20	24	2
21	48	0
22	24	0
23	0	3
24	24	2
25	30	0

n	$r_3(n)$	$H(n)$
26	72	0
27	32	4/3
28	0	2
29	72	0
30	48	0
31	0	3
32	12	3
33	48	0
34	48	0
35	48	2
36	30	5/2
37	24	0
38	72	0
39	0	4
40	24	2
41	96	0
42	48	0
43	24	1
44	24	4
45	72	0
46	48	0
47	0	5
48	8	10/3
49	54	0
50	84	0

n	$r_3(n)$	$H(n)$
51	48	2
52	24	2
53	72	0
54	96	0
55	0	4
56	48	4
57	48	0
58	24	0
59	72	3
60	0	4
61	72	0
62	96	0
63	0	5
64	6	7/2
65	96	0
66	96	0
67	24	1
68	48	4
69	96	0
70	48	0
71	0	7
72	36	3
73	48	0
74	120	0
75	56	7/3

n	$r_3(n)$	$H(n)$
76	24	4
77	96	0
78	48	0
79	0	5
80	24	6
81	102	0
82	48	0
83	72	3
84	48	4
85	48	0
86	120	0
87	0	6
88	24	2
89	144	0
90	120	0
91	48	2
92	0	6
93	48	0
94	96	0
95	0	8
96	24	6
97	48	0
98	108	0
99	72	3
100	30	5/2

n	$r_3(n)$	$H(n)$
101	168	0
102	48	0
103	0	5
104	72	6
105	96	0
106	72	0
107	72	3
108	32	16/3
109	72	0
110	144	0
111	0	8
112	0	4
113	96	0
114	96	0
115	48	2
116	72	6
117	120	0
118	72	0
119	0	10
120	48	4
121	78	0
122	120	0
123	48	2
124	0	6
125	144	0

n	$r_3(n)$	$H(n)$
126	144	0
127	0	5
128	12	7
129	144	0
130	48	0
131	120	5
132	48	4
133	48	0
134	168	0
135	0	8
136	48	4
137	96	0
138	96	0
139	72	3
140	48	8
141	96	0
142	48	0
143	0	10
144	30	15/2
145	96	0
146	192	0
147	56	7/3
148	24	2
149	168	0
150	120	0

n	$r_3(n)$	$H(n)$
151	0	7
152	72	6
153	144	0
154	96	0
155	96	4
156	0	8
157	72	0
158	96	0
159	0	10
160	24	6
161	192	0
162	108	0
163	24	1
164	96	8
165	96	0
166	120	0
167	0	11
168	48	4
169	78	0
170	144	0
171	120	5
172	24	4
173	168	0
174	144	0
175	0	7

n	$r_3(n)$	$H(n)$
176	24	10
177	48	0
178	96	0
179	120	5
180	72	6
181	120	0
182	144	0
183	0	8
184	48	4
185	192	0
186	144	0
187	48	2
188	0	10
189	192	0
190	48	0
191	0	13
192	8	22/3
193	48	0
194	240	0
195	96	4
196	54	9/2
197	120	0
198	120	0
199	0	9
200	84	7

Literatur

[1] F. Hirzebruch und D. Zagier, *Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus*, Inv. Math. **36** (1976), 57–113.

[2] L. Kilford, Modular forms - a classical and computational introduction, Imperial College Press, 2008.