NULLSTELLEN UND POLSTELLEN VON ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN ([1], S. 24–27)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion und $P_f \subset \mathbb{C}$ die Menge der Perioden von f. Es sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Wir sagen f ist *elliptisch* oder *doppelt periodisch bezüglich* Λ , falls $\Lambda \subset P_f$ gilt. Die Menge aller elliptischer Funktionen bezüglich Λ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}(\Lambda)$. Zeigen Sie:

Proposition 1. *Es sei $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann ist $\mathcal{K}(\Lambda)$ ein Unterkörper des Körpers der meromorphen Funktionen auf $\mathbb{C}$. Eine Funktion $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$ hat für beliebiges $u \in \mathbb{C}$ nur endlich viele Polstellen in dem Parallelogramm $P(u; \omega_1, \omega_2)$.*

Satz 2 (Satz von Liouville)**.** *Jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$ ist konstant.*

Erinnern Sie daran, dass eine in $c \in \mathbb{C}$ meromorphe Funktion f eine *Laurent Entwicklung* mit Entwicklungspunkt c hat:

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - c)^n .$$

Wir nennen m die *Ordnung* $\mathrm{ord}_c(f)$ von f bei c. Falls $m > 0$ (bzw. $m < 0$) gilt, so nennen wir m (bzw. $-m$) die Ordnung der Nullstelle (bzw. der Polstelle) von f bei c. Den Koeffizienten a_{-1} nennen wir das *Residuum* $\mathrm{res}_c(f)$ *an der Stelle* c. Beweisen Sie:

Satz 3. *Es sei $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$ und $P = P(u; \omega_1, \omega_2)$ ein Perioden-Parallelogramm von Λ. Dann gilt*

$$\sum_{c \in P} \mathrm{res}_c(f) = 0.$$

Zeigen Sie, dass die Anzahl der Polstellen von f in P gleich der Anzahl der Nullstellen von f in P ist, wenn man beim Zählen Vielfachheiten berücksichtigt:

Satz 4. *Es sei $f \in \mathcal{K}(\Lambda)$, $w \in \mathbb{C}$ und P ein Perioden-Parallelogramm von Λ. Dann gilt*

$$\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f) = \sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f - w) = 0,$$

$$\sum_{c \in P} \mathrm{ord}_c(f)\, c \in \Lambda.$$

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.