EISENSTEINREIHEN UND DIE DISKRIMINANTENFUNKTION

Dieser Vortrag hat das Ziel als Beispiele von Modulformen, Eisensteinreihen und die Diskriminantenfunktion einzuführen. Eisensteinreihen spielen eine besondere Rolle, da sie den Ring der Modulformen erzeugen und ferner zu elliptischen Kurven (d.h. die Menge der Lösungen zur Gleichung $y^2 = f(x)$ für ein Polynom f vom Grad 3) in Beziehung stehen.

Definieren Sie die Eisensteinreihe G_k und zeigen Sie, dass diese eine Modulform vom Gewicht k ist. In Ihrem Vortrag sollen Sie beweisen:

(1) Jede Modulform von Gewicht k kann als Linearkombination von G_k und einer Spitzenform (im vorherigen Vortrag definiert) geschrieben werden.

(2) Die Fourierkoeffizienten $a(n)$ einer holomorphen Modulform erfüllen die folgende asymptotische Beziehung

$$a(n) = -a(0)\frac{2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Hierin ist $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teilerpotenzsumme von n und B_k die k-te Bernoulli-Zahl, definiert durch die erzeugenden Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

(3) Es gilt falls $4 \nmid k$

$$G_k\left(i\right) = 0$$

und falls $6 \nmid k$

$$G_k\left(\rho\right) = 0,$$

worin $\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Auch die Δ-Funktion spielt eine große Rolle u. A. wegen ihrer Beziehung zu elliptischen Kurven und Gittern (d.h. $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{C}$ für feste $\tau, \omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \notin \mathbb{R}\tau$). Zeigen Sie, dass Δ eine Spitzenform ist.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.