$\frac{k}{12}$-FORMEL

Ziel dieses Vortrags ist der Beweis der $\frac{k}{12}$-Formel. Diese besagt, dass für eine Modulform vom Gewicht k gilt

$$\sum_{w\in\mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord} w} \operatorname{ord}_w(f) = \frac{k}{12}.$$

Hierin bezeichne $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$, worin

$$\mathbb{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) < 0\right\}$$

der Fundamentalbereich von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Weiter sei

$$\operatorname{ord}_w = \begin{cases} 2 & \text{falls } w = i, \\ 3 & \text{falls } w = \rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\operatorname{ord}_w(f)$ die Ordnung von f im Punkt w (d.h. für $\operatorname{ord}_w(f) > 0$ ist $\operatorname{ord}_w(f)$ die Ordnung der Nullstelle von f im Punkt w und für $\operatorname{ord}_w(f) < 0$ ist $-\operatorname{ord}_w(f)$ die Ordnung des Pol von f im Punkt w).

Diese Formel hat vielfältige Anwendungen. Beispielweise kann man sie verwenden um zu zeigen, dass eine Modulform f die holomorph auf $\mathbb{H}$ ist und $\operatorname{ord}_\infty(f) > \frac{k}{12}$ erfüllt identisch verschwindet.

Der Beweis der $\frac{k}{12}$-Formel verwendet den Residuensatz. Geben Sie diesen an und schreiben Sie dann die linke Seite der Fomel als ein Integral. Berechnung dieses Integrals liefert dann die rechte Seite der Identität. Erklären Sie die einzelnen Schritte im Beweis. Wiederholen Sie die hierzu benötigten Resultate aus der Funktionentheorie.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.