DER RING DER HOLOMORPHEN MODULFORMEN

Ziel dieses Vortrags ist es zu beweisen, dass die Eisensteinreihen G_4 und G_6 die gesamte Algebra holomorpher Modulformen beliebigen Gewichts erzeugen. Sie dürfen die $\frac{k}{12}$-Formel ohne Beweis verwenden. Beweisen Sie als erstes eine Formel für die Dimension des Vektorraums der holomorphen Modulformen vom Gewicht k. Zeigen Sie als nächstes wie man mit Hilfe von Δ und Eisensteinreihen unter Verwendung der Dimensionsformel induktiv den Raum $\mathbb{M}_k$ (holomorphe Modulformen vom Gewicht k) konstruktieren kann. Schließen Sie daraus, dass für die $\mathbb{C}$-Algebra

$$\mathbb{M} = \bigoplus_{k \text{ gerade}} \mathbb{M}_k$$

gilt

$$\mathbb{M} = \mathbb{C}[G_4^*, G_6^*],$$

d.h. sie wird von

$$G_4^*(\tau) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n \tau}$$

und

$$G_6^*(\tau) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n \tau}$$

erzeugt. Hierin ist $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teilerpotenzsumme von n. Zeigen Sie als nächstes, dass $\mathbb{M}_k$ eine Basis von Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten besitzt. Dies zeigt, dass das $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{M}$ von Linearkombinationen von $(G_4^*)^a (G_6^*)^b$ $(a, b \in \mathbb{N}_0)$ erzeugt wird. Die Tatsache, dass $\mathbb{M}_k$ eine Basis von Formen mit ganzzahligen Koeffizienten hat ist sehr nützlich z.B. für den Beweis von Kongruenzen für Fourierkoeffizienten von Modulformen.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.