QUASI-MODULFORMEN

Es gibt viele Funktionen deren Transformationsverhalten dem von Modulformen sehr ähnlich ist. Insbesondere werden wir in diesem Vortrag Modulformen vom „Gewicht $\frac{1}{2}$“ und vom „Gewicht 2“ betrachten. Genauer gesagt betrachten wir die Thetareihe

$$\theta(\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}$$

und die nur bedingt konvergente Eisensteinreihe

$$G_2\left(\tau\right) = \sum_{n\neq 0} n^{-2} + \sum_{m\neq 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(m\tau+n\right)^{-2}\right). \tag{1}$$

Es ist

$$\theta(\tau)^4 = \sum_{r,s,t,v\in\mathbb{Z}} e^{\pi i \left(r^2+s^2+t^2+v^2\right)\tau}$$

d.h. der $n$te Fourierkoeffizient dieser Funktion zählt wie oft man eine ganze Zahl n als Summe von 4 Quadraten schreiben kann.

Zeigen Sie als erstes, dass gilt

$$\theta\left(\tau+2\right) = \theta\left(\tau\right) \qquad \text{und} \qquad \theta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\theta\left(\tau\right),$$

d.h. θ transformiert wie eine Modulform von Gewicht $\frac{1}{2}$. Verwenden Sie dies um zu zeigen, dass

$$\theta^8(\tau) + \theta\left(\tau+1\right) + \tau^{-4}\theta^8\left(1-\frac{1}{\tau}\right)$$

eine Modulform ist.

Die Funktion G_2 ist keine Modulform sondern erfüllt nur das folgende fast modulare Transformationsgesetz

$$G_2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^2 G_2\left(\tau\right) - 2\pi i\tau.$$

Beweisen Sie diese Aussage. Achten Sie dabei auf die Reihenfolge der Summation in (1), die wegen der nur bedingten Konvergenz wichtig ist.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.