MODULFUNKTIONEN

Ziel dieses Vortrags ist die Untersuchung von Modulfunktionen, d.h. Modulformen vom Gewicht 0. Dieser Raum ist abgeschlossen unter Multiplikation.

Die $\frac{k}{12}$-Formel für eine Modulform $f \neq 0$ vom Gewicht 0 ist besonders einfach

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord} w} \operatorname{ord}_w f = 0.$$

Hierin ist

$$\operatorname{ord} w = \begin{cases} 2 & \text{falls } w = i, \\ 3 & \text{falls } w = \rho = e^{\frac{\pi i}{3}}, \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\operatorname{ord}_w(f)$ ist die Ordnung von f im Punkt w (d.h. für $\operatorname{ord}_w(f) > 0$ ist $\operatorname{ord}_w(f)$ die Ordnung der Nullstelle von f im Punkt w und für $\operatorname{ord}_w(f) < 0$ ist $-\operatorname{ord}_w(f)$ die Ordnung des Pols von f im Punkt w). Weiter sei $\mathbb{F}^* = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ mit

$$\mathbb{F} = \left\{ \tau \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) \leq \frac{1}{2}, |\tau| \geq 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(\tau) < 0 \right\}$$

der sogenannten Fundamentalbereich von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in der obere Halbebene $\mathbb{H}$. Zeigen Sie, dass die einzigen holomorphen Modulfunktionen die Konstanten sind. Es seien $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teilerpotenzsumme von n, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\operatorname{Re}(s) > 1$ die Riemannsche Zeta-Funktion und B_k die k-te Bernoulli-Zahl, definiert durch die erzeugende Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Dann definiert man die Eisensteinreihe vom Gewicht k durch

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) - \frac{2k\zeta(k)}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

und

$$G_k^*(\tau) = \frac{G_k(\tau)}{2\zeta(k)}$$

die normierte Eisensteinreihe vom Gewicht k.

Wir definieren nun

$$j(\tau) = \frac{(G_4^*(\tau))^3}{\Delta^*(\tau)},$$

worin

$$\Delta^*(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \left((60 G_4(\tau))^3 - 27 (140 G_6(\tau))^2 \right)$$

definiert wird. Zeigen Sie, dass j eine Modulfunktion ist, die nur in ∞ einen Pol erster Ordung hat. Zeigen Sie, dass $\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}$ die einzige Nullstelle von j ist und schließen Sie daraus, dass $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ ein Isomorphismus ist. Beweisen Sie außerdem, dass die Algebra der Modulfunktionen über $\mathbb{C}$ von j erzeugt wird.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.