DEDEKIND'S η-FUNCTION UND Δ^*

Dieser Vortrag beschreibt das Transformationsgesetz einer weiteren (holomorphen) Modulform vom „Gewicht $\frac{1}{2}$“. Wir definieren die Dedekind'sche η-Funktion für $\tau \in \mathbb{H}$ als

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m \tau}\right).$$

Zeigen Sie, dass η die folgende Transformationsgesetze erfüllt:

$$\begin{aligned} \eta(\tau + 1) &= e^{\frac{\pi i}{12}} \eta(\tau), \\ \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \sqrt{-i\tau}\, \eta(\tau). \end{aligned}$$

Es seien $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teilerpotenzsumme von n, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Riemannsche Zeta-Funktion und B_k die k-te Bernoulli-Zahl, definiert durch die erzeugende Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

Dann definiert man die Eisensteinreihe vom Gewicht k als

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) - \frac{2k\zeta(k)}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) e^{2\pi i n \tau}.$$

Wie in einem frühere Vortrag definiert man

$$\Delta^*(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{12}} \left((60 G_4(\tau))^3 - 27 (140 G_6(\tau))^2 \right).$$

Aus den Transfomationsgesetz der Dedekind'schen η-Funktion können Sie dann eine interessante Produktformel für $\Delta^*(\tau)$ schließen.

Literatur

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.