HECKE-OPERATOREN

Dieser Vortrag behandelt Hecke-Operatoren, die eine wichtige Rolle für die Arithmetik von Modulformen spielen. Wie zuvor bezeichne ($k \in \mathbb{Z}$) $\mathbb{M}_k$ den Vektorraum der holomorphen Modulformen vom Gewicht k. Definieren Sie für $n \in \mathbb{N}$ den n-ten Hecke-Operator (zum Gewicht k) $T_n^{(k)} = T_n$. Das Hauptthema dieses Vortrags ist es zu zeigen, dass gilt: $T_n : \mathbb{M}_k \to \mathbb{M}_k$. Im Falle $n = p$ eine Primzahl wird die Wirkung des Hecke-Operators beschreiben durch

$$T_p(f)\,(\tau) = p^{k-1} f\,(p\tau) + \frac{1}{p} \sum_{b \pmod p} f\left(\frac{\tau + b}{p}\right).$$

Es sei nun $f \in \mathbb{M}_k$ mit Fourierentwicklung

$$f\,(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f\,(m)\, e^{2\pi i m \tau}.$$

Zeigen Sie, dass für den m-ten Fourierkoeffizienten $\alpha_{T_n(f)}\,(m)$ von $T_n(f)$ gilt

$$\alpha_{T_n(f)}\,(m) = \sum_{d \mid \mathrm{ggT}(m,n)} d^{k-1} \alpha_f \left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Zeigen Sie als nächstes, dass $T_n(f) \in \mathbb{M}_k$ falls $f \in \mathbb{M}_k$. Die Idee hierzu besteht darin, den Hecke-Operator als Summe über gewisse Vertetersysteme von Matrizen umzuschreiben.

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.