DIRICHLETREIHEN UND MODULFORMEN

In diesem Vortrag diskutieren wir einige Aspekte der Beziehung zwischen sogenannten Dirichletreihen und Modulformen.

Für $k \in 2\mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{M}_k$ den Vektorraum der holomorphen Modulformen vom Gewicht k. Wir definieren für $f \in \mathbb{M}_k$ mit Fourierentwicklung

$$f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$$

die zu f korrespondierende Dirichletreihe

$$D_f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Diese Funktion konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > k$. Ferner definieren wir die Vervollständigung von $D_f(s)$ als

$$R_f(s) = (2\pi)^{-s}\,\Gamma(s) D_f(s).$$

Hierin ist die Gammafunktion $\Gamma(s)$ definiert durch die folgende Integraldarstellung

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0).$$

Zeigen Sie, dass R_f die folgende Funktionalgleichung erfüllt

$$R_f(s) = (-1)^{\frac{k}{2}}\, R_f(k-s).$$

Dies ist der 1. Teil des Beweises von Satz 3.4 in [2] für den Spezialfall, dass $\lambda = 1$ und $\varepsilon = (-1)^{\frac{k}{2}}$ ist.

References

[1] M. Koecher und A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
[2] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer-Verlag, Berlin, 2000.