

2. Die LAURENT-Entwicklung. Wie in 1.9(2) betrachtet man die EISENSTEIN-Reihe

$$(1) \quad G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$

Nach Proposition 1.9 sind die entsprechenden Reihen für ungerades $k \geq 3$ gleich Null. Man setzt schließlich

$$\gamma := \gamma(\Omega) := \min\{|\omega|; 0 \neq \omega \in \Omega\}$$

und erhält den

Satz. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $0 < |z| < \gamma(\Omega)$ gilt

$$(2) \quad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)G_{2n} \cdot z^{2n-2} = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \dots$$

Beweis. Aufgrund von

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1}, \quad |t| < 1,$$

hat man für $\omega \neq 0$

$$\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{(1-z/\omega)^2} - 1 \right) = \sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}}, \quad |z| < \gamma,$$

und daher

$$(*) \quad \wp(z) = z^{-2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \left(\sum_{m=2}^{\infty} m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right), \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen

$$\left| m \cdot \frac{z^{m-1}}{\omega^{m+1}} \right| \leq \gamma m \left(\frac{|z|}{\gamma} \right)^{m-1} \cdot |\omega|^{-3}$$

und aufgrund des Konvergenz-Lemma 1.9 ist die Reihe (*) in m und ω absolut konvergent. Nach Satz 1.8 darf man also umordnen und erhält

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m \geq 2} m G_{m+1} \cdot z^{m-1}, \quad 0 < |z| < \gamma.$$

Wegen Proposition 1.9 ist das aber (2). \square

3. Die zweite Differentialgleichung. Die WEIERSTRASSsche \wp -Funktion genügt der Differentialgleichung

$$(1) \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3.$$

Dabei sind g_2 und g_3 definiert durch

$$(2) \quad g_2 := g_2(\Omega) := 60 G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140 G_6(\Omega).$$

Man nennt g_2 und g_3 die WEIERSTRASS-*Invarianten* des Gitters Ω . Wir verwenden das LANDAU-*Symbol* und schreiben $\mathcal{O}(z^k)$ für eine Funktion $f(z)$, die $|f(z)| \leq C \cdot |z|^k$ mit einem geeigneten C für z aus einer Umgebung von 0 erfüllt.

Beweis. Ausgehend von

$$\wp(z) = z^{-2} + 3G_4 \cdot z^2 + 5G_6 \cdot z^4 + \mathcal{O}(z^6)$$

(vgl. 2(2)) berechnet man

$$\begin{aligned} \wp^2(z) &= z^{-4} + 6G_4 + 10G_6 \cdot z^2 + \mathcal{O}(z^3), \\ \wp^3(z) &= z^{-6} + 9G_4 \cdot z^{-2} + 15G_6 + \mathcal{O}(z), \\ \wp'(z) &= -2 \cdot z^{-3} + 6G_4 \cdot z + 20G_6 \cdot z^3 + \mathcal{O}(z^4), \\ \wp'^2(z) &= 4 \cdot z^{-6} - 24G_4 \cdot z^{-2} - 80G_6 + \mathcal{O}(z). \end{aligned}$$

Daraus erhält man mit (2)

$$(*) \quad \wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2\wp(z) + g_3 = \mathcal{O}(z).$$

Hier gehört die linke Seite zu $\mathcal{K}(\Omega)$ und hat Pole höchstens dort, wo \wp oder \wp' Pole hat. Nach (*) ist die linke Seite aber bei 0 und daher überall holomorph. Satz 2.2A zeigt, dass diese Funktion konstant ist. Nach (*) wiederum ist diese Konstante gleich Null. \square

Differenziert man (1), so folgt das

Korollar A. *Es gilt*

$$2\wp'' = 12\wp^2 - g_2.$$

Korollar B. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\wp^{(k)} \in \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp] + \mathbb{Z}[G_4, G_6, \wp]\wp'.$$

Beweis. Dies ist für $k = 0$ und 1 richtig. Wegen (2) folgt die Aussage für $k = 2$ aus Korollar A. Nun ergibt eine Induktion die Behauptung. \square

Korollar C. *Für $f \in \mathcal{K}(\Omega)$ sind äquivalent:*

- (i) f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
- (ii) $f \in \mathbb{C}[\wp] + \mathbb{C}[\wp] \cdot \wp'$.

Beweis. (i) \implies (ii): Subtrahiert man $\alpha\wp^n$ bzw. $\alpha\wp^n \cdot \wp'$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$, geeignet, von f , so kann man nun die Ordnung der Pole in den Gitterpunkten sukzessiv erniedrigen. Schließlich beachte man noch $\text{res}_0 f = 0$ nach Satz 2.2B.

(ii) \implies (i): Klar. \square

Korollar D. Für $n \geq 4$ gilt die Rekursionsformel

$$(3) \quad (n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{\substack{p \geq 2, q \geq 2 \\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Beweis. Man trägt die LAURENT-Reihe 2(2) in $\wp'' + 30G_4 = 6\wp^2$ nach Korollar A ein:

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 2} (2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n}z^{2n-4} + 30G_4 \\ &= 12 \sum_{n \geq 2} (2n-1)G_{2n}z^{2n-4} + 6 \sum_{p \geq 2} \sum_{q \geq 2} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt bereits die Behauptung. \square

Speziell erhält man

$$(4) \quad 7G_8 = 3G_4^2, \quad 11G_{10} = 5G_4G_6, \quad 143G_{12} = 42G_4G_8 + 25G_6^2 = 18G_4^3 + 25G_6^2$$

und das

Korollar E. Für $k \geq 8$ gilt

$$G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6].$$

Korollar F. Sei Ω ein Gitter in \mathbb{C} mit zugehörigen WEIERSTRASS-Invarianten g_2 und g_3 . Jede in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ meromorphe, nicht-konstante Lösung f der Differentialgleichung

$$f'^2 = 4f^3 - g_2f - g_3$$

wird durch $f(z) = \wp(z+w)$, $z \in G$, mit geeignetem $w \in \mathbb{C}$ gegeben. Ist $f \in \mathcal{M}$ eine solche Lösung, dann ist Ω das Periodengitter von f . Das Gitter Ω ist durch $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$, also auch durch $G_4(\Omega)$ und $G_6(\Omega)$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei f eine in G meromorphe, nicht-konstante Lösung der angegebenen Differentialgleichung. Ist f in einer Kreisscheibe $U \subset G$ um u holomorph und f' ungleich Null in U , dann gilt bei geeigneter Wahl einer Wurzel $f' = \sqrt{4f^3 - g_2f - g_3}$. Nach Lemma 2.3B wählt man nun ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\wp(w+u) = f(u)$ und darf darüber hinaus noch $\wp'(w+u) = f'(u)$ annehmen, indem man ggf. w durch $-w-2u$ ersetzt. Die Funktionen $f(z)$ und $g(z) := \wp(z+w)$ genügen der gleichen Differentialgleichung 1. Ordnung und stimmen im Punkt u überein. Dann folgt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in U$ aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz (vgl. W. WALTER [2000], 66). Der Identitätssatz impliziert $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$. Die fehlende Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass für die \wp -Funktion nach dem Konstruktions-Satz 1 das Periodengitter gleich der Polstellenmenge ist. \square

Bemerkung. An Stelle der Differentialgleichung (1) kann man bei gegebener rationaler Funktion R allgemeiner nach Lösungen $w = f(z)$ der so genannten *binomischen Differentialgleichung*

$$(5) \quad w^n = R(z, w)$$

für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ fragen. Es gilt hier der

Satz von MALMQUIST und YOSIDA. *Besitzt (5) eine auf \mathbb{C} meromorphe und transzendente Lösung, dann ist $R(z, w)$ ein Polynom in w von einem Grad $\leq 2n$.*

Einen *Beweis* findet man in E. HILLE, *Ordinary differential equations in the complex domain*, J. Wiley, New York 1976, Theorem 4.6.4. Eine Klassifikation der binomischen Differentialgleichungen beschreibt N. STEINMETZ, *Math. Ann.* **244**, 263–274 (1979).

4. Ein Vergleich der Differentialgleichungen. Neben

$$(1) \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

war in Satz 2.3 die Differentialgleichung

$$(2) \quad \wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

hergeleitet worden. Dabei waren e_1, e_2, e_3 wie in 2.3(3) durch

$$(3) \quad e_k = \wp(\omega_k/2), \quad k = 1, 2, 3, \quad \omega_3 := \omega_1 + \omega_2,$$

definiert, wenn ω_1, ω_2 eine Basis von Ω ist. Da \wp mehr als drei verschiedene Werte annimmt, ergibt ein Vergleich für eine Unbestimmte X über \mathbb{C} den

Satz. *Es gilt*

$$4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Aus Korollar 2.4A folgt dann

Korollar A. *Für über \mathbb{C} unabhängige Unbestimmte X, Y gilt*

$$\mathcal{K}(\Omega) \cong \mathbb{C}(X)[Y]/I(X, Y),$$

wenn $I(X, Y)$ das von $Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3$ in $\mathbb{C}(X)[Y]$ erzeugte *Hauptideal* ist.

Ein Koeffizientenvergleich im Satz ergibt das

Korollar B. *Es gilt*

$$(4) \quad 0 = e_1 + e_2 + e_3,$$

$$(5) \quad g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1),$$

$$(6) \quad g_3 = 4e_1e_2e_3.$$

Korollar C. *Es gilt*

$$g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0.$$

Beweis. Mit (4) und (5) erhält man zunächst

$$(*) \quad g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \quad \text{bzw.} \quad g_2^2 = 16(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2).$$

Weiter ergeben (4) und (5) dann auch noch

$$2(e_1 - e_2)^2 = 2(e_1^2 + e_2^2) - 4e_1e_2 = 2g_2 - 2e_3^2 + 4e_3(e_1 + e_2) = 2g_2 - 6e_3^2,$$

also

$$(e_1 - e_2)^2 = g_2 - 3e_3^2.$$

Da die durch zyklische Vertauschung der e_1, e_2, e_3 entstehenden Beziehungen ebenfalls gültig sind, hat man

$$\begin{aligned} 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 &= 16(g_2 - 3e_1^2)(g_2 - 3e_2^2)(g_2 - 3e_3^2) \\ &= 16g_2^3 - 3 \cdot 16g_2^2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + 9 \cdot 16g_2(e_1^2e_2^2 + e_2^2e_3^2 + e_3^2e_1^2) - 27 \cdot 16e_1^2e_2^2e_3^2. \end{aligned}$$

Wegen (*) und (6) ist die rechte Seite aber gleich $g_2^3 - 27g_3^2$. Nach 2.3(6) sind e_1, e_2, e_3 paarweise verschieden. \square

$$(7) \quad \Delta := \Delta(\Omega) := g_2^3 - 27g_3^2$$

nennt man die *Diskriminante* und

$$(8) \quad j := j(\Omega) := (12g_2)^3 / \Delta$$

die *absolute Invariante* des Gitters Ω . Mit Korollar B und C folgt das

Korollar D. *Es gilt*

$$j = -4 \cdot 12^3 \cdot \frac{(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1)^3}{(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2}.$$

Korollar E. *Für $\lambda := \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}$ gilt*

$$j = 256 \cdot \frac{(1 - \lambda + \lambda^2)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}.$$

Bemerkungen. a) Die Diskriminante Δ ist (bis auf einen Faktor) zugleich auch die Diskriminante des Polynoms $f(X) := 4X^3 - g_2X - g_3$ im Sinne der Algebra (vgl. S. LANG [1993], V, § 10): Dort wird die Diskriminante des Polynoms f (bis auf einen Faktor) als die *Resultante* von f und f' erklärt, also durch

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 0 & -g_2 & -g_3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -g_2 & -g_3 \\ 12 & 0 & -g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & -g_2 \end{pmatrix} = -64\Delta.$$

Satz. Es gilt $\mathbb{M}_k = \{0\}$ für $k < 0$.

Beweis. Nach (M.3^v) ist f speziell für alle τ mit $\text{Im } \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Da k negativ ist, gilt dies dann auch für \tilde{f} . Nun kann man die Proposition auf $\varphi = \tilde{f}$ anwenden und sieht, dass \tilde{f} auf \mathbb{H} beschränkt ist.

Man entwickelt f in eine FOURIER-Reihe und erhält für die FOURIER-Koeffizienten gemäß 2(4)

$$\alpha_f(m) = e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 f(x + iy) \cdot e^{-2\pi imx} dx, \quad m \geq 0.$$

Mit (1) folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \cdot \int_0^1 \tilde{f}(x + iy) dx \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my}$$

mit einer von y unabhängigen Konstanten C . Da die linke Seite ebenfalls nicht von y abhängt, kann man den Limes $y \rightarrow 0$ bilden und erhält $\alpha_f(m) = 0$ für alle $m \geq 0$, also $f \equiv 0$. \square

6. Das Wachstum der FOURIER-Koeffizienten. Für $f \in \mathbb{M}_k$ wird \tilde{f} wie in 5(1) erklärt.

Satz. Für $k > 0$ und $f \in \mathbb{M}_k$ gilt:

a) \tilde{f} ist genau dann auf \mathbb{H} beschränkt, wenn $f \in \mathbb{S}_k$ gilt. In diesem Fall existiert ein $w \in \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft

$$\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(w) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

b) Ist $f \in \mathbb{S}_k$, so gilt

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k/2}) \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. a) Ist f eine Spitzenform, so ist \tilde{f} wegen Lemma 4 für $\text{Im } \tau \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ beschränkt. Die Behauptung folgt nun aus Proposition 5. Ist umgekehrt \tilde{f} beschränkt, so sind wegen Lemma 4 auch $\alpha_f(0) \cdot y^{k/2}$ in \mathbb{F} beschränkt. Aus $k > 0$ folgt $\alpha_f(0) = 0$, also $f \in \mathbb{S}_k$. Die Existenz von w ergibt sich aus $\lim_{y \rightarrow \infty} \tilde{f}(\tau) = 0$ nach Lemma 4.

b) Man entwickelt f in eine FOURIER-Reihe und wie im Beweis von Satz 5 folgt

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot y^{-k/2} \cdot e^{2\pi my} \quad \text{für } y > 0.$$

Da die linke Seite nicht von y abhängt, darf man rechts $y = 1/m$, $m > 0$, eintragen und erhält

$$|\alpha_f(m)| \leq C \cdot e^{2\pi} \cdot m^{k/2},$$

also die Behauptung. \square

Aufgaben. Es bezeichne $A(\mathbb{H})$ die Menge aller modulo 1 periodischen, auf $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ holomorphen Funktionen $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ mit zugehöriger FOURIER-Reihe der Form

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

gemäß Lemma 2. $A(\mathbb{H})$ ist offenbar eine \mathbb{C} -Algebra, die alle ganzen Modulformen enthält. Es bezeichne $B(\mathbb{H})$ die Teilmenge derjenigen $f \in A(\mathbb{H})$, zu denen es ein $\ell \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1.$$

Für $f \in B(\mathbb{H})$ setzt man

$$\kappa(f) := \inf \{ \ell \geq 0 ; \alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^\ell) \quad \text{für } m \geq 1 \}.$$

- 1) $B(\mathbb{H})$ ist eine Unter algebra von $A(\mathbb{H})$. Speziell gilt für $f, g \in B(\mathbb{H})$:
 - a) $\kappa(f + g) \leq \max\{\kappa(f), \kappa(g)\}$,
 - b) $\kappa(f \cdot g) \leq \kappa(f) + \kappa(g) + 1$.
- 2) Ist $f \in A(\mathbb{H})$ und $(\operatorname{Im} \tau)^\kappa \cdot f(\tau)$ für ein $\kappa \geq 0$ auf \mathbb{H} beschränkt, dann gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq \kappa$.
- 3) Ist $f \in \mathbb{S}_k$, so gehört f zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) \leq k/2$.
- 4) Ist $f \in B(\mathbb{H})$, so konvergiert die DIRICHLET-Reihe

$$D_f(s) := \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot m^{-s}$$

für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \kappa(f) + 1$ absolut.

- 5) Die Funktion $f(\tau) = \vartheta(2\tau)$ (vgl. E.3) gehört zu $B(\mathbb{H})$ mit $\kappa(f) = 0$ und $D_f(s) = 2\zeta(2s)$.
- 6) $B(\mathbb{H})$ ist eine echte Unter algebra von $A(\mathbb{H})$.
- 7) Zu $f \in \mathbb{M}_k$ definiert man eine Funktion

$$f^* : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \tau \longmapsto \overline{f(-\bar{\tau})}.$$

Dann gilt $f^* \in \mathbb{M}_k$ und $f^{**} = f$. Die FOURIER-Koeffizienten von f sind genau dann reell, wenn $f^* = f$. Die FOURIER-Koeffizienten von f sind genau dann rein imaginär, wenn $f^* = -f$.

- 8) \mathbb{M}_k besitzt eine Basis aus ganzen Modulformen mit reellen FOURIER-Koeffizienten.
- 9) $f \in \mathbb{M}_k$ ist genau dann eine Spitzenform, wenn es zu jedem $\gamma > 0$ positive Konstanten α und β gibt, so dass

$$|f(\tau)| \leq \alpha \cdot e^{-\beta y} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \quad \text{mit } y \geq \gamma.$$

- 10) Sei $f \in \mathbb{M}_k$ und $\rho = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$. Es gilt $f(i) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod{4}$, und $f(\rho) = 0$, falls $k \not\equiv 0 \pmod{6}$.

- 11) Für $f \in \mathbb{S}_k$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} f(r + iy) = 0.$$

Für $f \in \mathbb{M}_k$, $f \notin \mathbb{S}_k$, $k > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ gilt

$$\lim_{y \downarrow 0} |f(r + iy)| = \infty.$$

§2. Beispiele

1. Die EISENSTEIN-Reihen. Die klassischen Beispiele für ganze Modulformen sind die EISENSTEIN-Reihen

$$(1) \quad G_k(\tau) := \sum'_{m,n} (m\tau + n)^{-k} \quad \text{für } k \geq 3 \text{ ganz}$$

gemäß I.1.9(2) bzw. I.3.2(1). Dabei soll der Strich am Summenzeichen bedeuten, dass die Summe über alle Paare $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $(m, n) \neq (0, 0)$ zu erstrecken ist. Obwohl die wesentlichen Eigenschaften der G_k bereits in I.§4 hergeleitet wurden, sollen hier einige davon mit anderen Beweisen neu begründet werden:

Proposition. *Zu jedem Kompaktum \mathcal{K} in \mathbb{H} gibt es positive Konstanten γ und δ mit*

$$\gamma \cdot |mi + n| \leq |m\tau + n| \leq \delta \cdot |mi + n|$$

für alle $m, n \in \mathbb{R}$ und alle $\tau \in \mathcal{K}$.

Beweis. Aus Homogenitätsgründen darf man $m^2 + n^2 = 1$, also $|mi + n| = 1$ voraussetzen. Dann nimmt aber die stetige Funktion

$$(\tau, m, n) \mapsto |m\tau + n|$$

auf der kompakten Menge $\mathcal{K} \times \{(m, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} ; m^2 + n^2 = 1\}$ ein Minimum γ und ein Maximum δ an. Da $\text{Im } \tau$ für $\tau \in \mathcal{K}$ durch eine positive Konstante nach unten beschränkt ist, gilt $\gamma > 0$. \square

In Analogie zu I.1.9 erhält man nun das

Konvergenz-Lemma. *Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ ist G_k absolut und kompakt-gleichmäßig konvergent. Damit ist G_k eine holomorphe Funktion auf \mathbb{H} .*

Beweis. Nach der Proposition braucht nur die Konvergenz von

$$\sum'_{m,n} (m^2 + n^2)^{-\alpha} \quad \text{für } \alpha > 1$$

bewiesen zu werden. Den wohl einfachsten Beweis hierfür findet man bereits bei WEIERSTRASS (*Math. Werke V*, 117): Mit Hilfe der Ungleichung $m^2 + n^2 \geq |mn|$ erhält man

$$\sum_E (m^2 + n^2)^{-\alpha} \leq 4 \sum_{m \geq 1} m^{-2\alpha} + 4 \left(\sum_{m \geq 1} m^{-\alpha} \right)^2 \leq 4(\zeta(2\alpha) + \zeta^2(\alpha)) < \infty$$

für $\alpha > 1$ und jede endliche Teilmenge E von $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$. \square

Eine einfache Konsequenz (vgl. I.4.2(5)) ist das folgende Transformationsverhalten der EISENSTEIN-Reihen.

Transformations-Lemma. Für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 3$ und alle $M \in \Gamma$ gilt $G_k|_k M = G_k$, d. h.

$$(2) \quad G_k(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Beweis. Wegen

$$(m \cdot M\tau + n) \cdot (c\tau + d) = m'\tau + n' \quad \text{mit} \quad (m', n') = (m, n) \cdot M$$

durchläuft nach dem Äquivalenz-Satz I.1.5 mit (m, n) auch (m', n') alle Paare ganzer Zahlen genau einmal. \square

Mit $M = -E$ erhält man das

Korollar A. Es gilt $G_k = 0$ für ungerades $k \geq 3$.

Aus Kapitel I übernehmen wir den Satz 4.2, dessen Beweis keinen direkten Bezug zur Theorie der elliptischen Funktionen benötigte: Für gerades $k \geq 4$ gilt

$$(3) \quad G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2 \cdot \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Es ist zweckmäßig, neben der Reihe G_k auch die *normierte* EISENSTEIN-Reihe

$$(4) \quad G_k^* := \frac{1}{2\zeta(k)} \cdot G_k, \quad k \geq 4 \text{ gerade},$$

zu betrachten. Da jedes Paar ganzer Zahlen $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$ sich eindeutig in der Form $(m, n) = (t\mu, t\nu)$ mit $t \in \mathbb{N}$ und teilerfremden $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt, hat man auch

$$(4') \quad G_k^*(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{ggT}(m,n)=1} (m\tau + n)^{-k}, \quad k \geq 4 \text{ gerade}.$$

Wir wollen eine weitere Darstellung von G_k^* herleiten. Dazu sei

$$(5) \quad \Gamma_\infty := \{\pm T^n; n \in \mathbb{Z}\} = \{M \in \Gamma; c = 0\}.$$

„ $M : \Gamma_\infty \setminus \Gamma$ “ bedeutet, dass M ein Vertretersystem \mathcal{V} der Rechtsnebenklassen von Γ nach Γ_∞ durchläuft, also

$$\bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma_\infty M = \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma_\infty M \neq \Gamma_\infty N \quad \text{für } M, N \in \mathcal{V} \text{ mit } M \neq N.$$

Im Hinblick auf das Ergänzungs-Lemma II.2.1 folgt

$$(6) \quad G_k^*(\tau) = \sum_{M: \Gamma_\infty \setminus \Gamma} 1|_k M(\tau) = \sum_{M: \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (c\tau + d)^{-k} \quad \text{für gerades } k \geq 4.$$

Man verwendet nun die EULERSche Formel (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 11.3.1)

$$(7) \quad 2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \cdot B_k, \quad k \geq 2 \text{ gerade,}$$

wobei die ersten BERNOULLI-Zahlen B_k gegeben sind durch

k	2	4	6	8	10	12	14
B_k	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{5}{66}$	$-\frac{691}{2730}$	$\frac{7}{6}$
$-\frac{2k}{B_k}$	-24	240	-504	480	-264	$\frac{65520}{691}$	-24

Aus (3) erhält man dann

$$(9) \quad G_k^*(\tau) = 1 - \frac{2k}{B_k} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}, \quad k \geq 4 \text{ gerade.}$$

Das bedeutet insbesondere

$$(10) \quad G_4^*(\tau) = 1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

$$(11) \quad G_6^*(\tau) = 1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Nach diesen Vorbereitungen zeigt sich, dass die Vektorräume der ganzen Modulformen für gerades Gewicht $k \geq 4$ nicht nur aus der Null bestehen:

Satz. Für gerades $k \geq 4$ gilt:

- a) $G_k \in \mathbb{M}_k$.
- b) $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k \oplus \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* \oplus \mathbb{S}_k$.

Beweis. a) Man verwendet das Konvergenz-Lemma sowie (2) und (3).

b) Für $f \in \mathbb{M}_k$ ist $f - \alpha_f(0) \cdot G_k^*$ eine Spitzenform. □

Korollar B. Für gerades $k \geq 4$ und $f \in \mathbb{M}_k$ gilt

$$(12) \quad \alpha_f(m) = -\alpha_f(0) \cdot \frac{2k}{B_k} \cdot \sigma_{k-1}(m) + \mathcal{O}(m^{k/2}), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Man verwendet Teil b) des Satzes, (9) und Teil b) von Satz 1.6. □

Wegen

$$m^r \leq \sigma_r(m) = \sum_{d|m} d^r = m^r \sum_{d|m} d^{-r} \leq \zeta(r) \cdot m^r$$

für $r > 1$ folgt speziell

$$(13) \quad \alpha_f(m) = \mathcal{O}(m^{k-1}) \quad \text{für alle } f \in \mathbb{M}_k, k \geq 4 \text{ gerade,}$$

und diese Abschätzung kann für $f \notin \mathbb{S}_k$ nicht verbessert werden.

Bei den EISENSTEIN-Reihen treten gewisse *Zwangsnulstellen* auf:

Nullstellen-Lemma. a) *Es gilt $G_k(i) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod{4}$, speziell hat man $G_6(i) = 0$.*

b) *Es gilt $G_k(\rho) = 0$ für $k \not\equiv 0 \pmod{6}$, speziell $G_4(\rho) = 0$, $\rho := \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$.*

Beweis. Es gilt $i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $\rho(\mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\rho + \mathbb{Z}$ wegen $\rho^2 = \rho - 1$. Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen (1) hat man daher $G_k(i) = i^{-k} \cdot G_k(i)$ und analog auch $G_k(\rho) = \rho^{-k} \cdot G_k(\rho)$. \square

Bemerkung. Man kann die Lage der Nullstellen etwas genauer beschreiben. Nach einem Resultat von F.K.C. RANKIN und H.P.F. SWINNERTON-DYER (Bull. Lond. Math. Soc. **2**, 169–170 (1970)) liegen für gerades $k > 2$ die Nullstellen von G_k in \mathbb{F} auf dem Einheitskreis. Man vergleiche dazu auch B. SCHÖNEBERG [1974], III.1.6.

2. Die Diskriminante Δ wurde bereits in I.3.4(7) eingeführt und in I.4.3 ausführlicher behandelt. Nach I.4.3(1) ist sie durch

$$(1) \quad \Delta := (60G_4)^3 - 27(140G_6)^2$$

definiert. Das Transformations-Lemma 1 ergibt sofort

$$(2) \quad \Delta(M\tau) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H} \quad \text{und} \quad M \in \Gamma$$

und der Satz I.4.3 zeigt, dass Δ eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$(3) \quad \Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

besitzt, bei der alle Koeffizienten $\tau(m)$ ganze Zahlen sind und $\tau(1) = 1$ gilt. Eine kurze Tabelle der $\tau(m)$ hatten wir in I.4.3(6) notiert.

Aus (1), (2) und (3) erhält man den wichtigen

Satz. *Es gilt $\Delta \in \mathbb{S}_{12}$.*

Als wichtigste Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen vermerken wir die Nullstellenfreiheit von Δ nach Korollar I.3.4C sowie die Produktentwicklung nach I.6.5(1). Wir werden diese Tatsachen hier (noch) nicht verwenden, sondern in Satz 4.1 und Korollar 6.2 neue Beweise geben.

Auch hier ist es zweckmäßig, eine normierte Version gesondert zu bezeichnen. Im Hinblick auf (3) definiert man die *normierte Diskriminante* durch

$$(4) \quad \Delta^*(\tau) := (2\pi)^{-12} \cdot \Delta(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi im\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

Mit 1(4), 1(7) und 1(8) verifiziert man jetzt mühelos

$$(5) \quad \Delta^* = \frac{1}{1728}(G_4^{*3} - G_6^{*2}).$$

Multipliziert man die FOURIER-Reihen in (5) formal aus, so erscheinen die Koeffizienten in evidenten Weise als ganze Zahlen. Man wird fragen, ob eine „vernünftige“ einfache arithmetische Beschreibung der Koeffizienten $\tau(m)$ existiert. Bis heute ist eine solche jedoch nicht gefunden worden. Nach ausführlichen numerischen Berechnungen (über $m = 10^{15}$ hinaus) hat D.H. LEHMER (Duke Math. J. **14**, 429–433 (1947)) die Vermutung ausgesprochen, dass $\tau(m) \neq 0$ für alle m gilt. Bisher ist kein Beweis dieser LEHMERSchen Vermutung bekannt.

3. Srinivasa RAMANUJAN (1887–1920) wurde in einer südindischen Kleinstadt in der Nähe von Madras geboren. Nach G.H. HARDY war er nur „halbgebildet“ und blieb ohne bessere Ausbildung. Seine wissenschaftliche Entwicklung war aber so einzigartig, dass sie sich nicht mit der eines anderen Mathematikers vergleichen lässt: An Hand von einfachen Lehrbüchern lernte er die Grundlagen der Analysis. Um 1903 begann er, seine Entdeckungen (ohne Beweis) in seinen *Notebooks* aufzuschreiben, bis etwa 1910 lebte er völlig auf sich allein gestellt nur für seine Mathematik.

In einem Brief an G.H. HARDY teilte er diesem einige seiner Ergebnisse mit. Nach und nach übermittelte er HARDY etwa 120 Theoreme über meist formale Identitäten und (teilweise falsche oder unrichtig formulierte) Aussagen zur Primzahltheorie. Ein Teil der von ihm angegebenen Formeln war kompliziert und erschien tieflegend. Auf Einladung von HARDY besuchte RAMANUJAN von 1914 bis 1917 Cambridge und eine überaus fruchtbare Zusammenarbeit zwischen beiden begann. RAMANUJAN starb im Alter von 32 Jahren in seiner Heimatstadt.

Aufgrund numerischer Rechnungen (er gibt die Werte von $\tau(m)$ für $m \leq 30$ an) vermutete RAMANUJAN, dass die zahlentheoretische Funktion $\tau(m)$ *multiplikativ* ist, d. h., dass

$$\tau(mn) = \tau(m) \cdot \tau(n) \quad \text{für alle teilerfremden } m, n \in \mathbb{N}$$

gilt. Dies wurde kurz darauf von L.J. MORDELL (Proc. Cambridge Phil. Soc. **19**, 117–124 (1920)) bewiesen. Wir geben einen auf E. HECKE zurückgehenden Beweis in Satz IV.1.4.

RAMANUJAN entdeckte bzw. vermutete eine ganze Reihe von Kongruenz-Eigenschaften der Koeffizienten $\tau(m)$. So gilt z. B.

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N}$$

(vgl. **4.2**). Er vermutete Kongruenzen der Form

$$\tau(7m + 3) \equiv 0 \pmod{7} \quad \text{und} \quad \tau(23m + k) \equiv 0 \pmod{23} \quad \text{für } m \in \mathbb{N},$$

wenn k ein so genannter quadratischer Nichtrest modulo 23 ist.

Die spektakulärste von RAMANUJAN ausgesprochene Vermutung trägt noch heute seinen Namen, wenn sie inzwischen auch von P. DELIGNE (Publ. Math. IHES **43**, 273–307 (1974)) als ein Spezialfall einer wesentlich allgemeineren Aussage bewiesen wurde:

RAMANUJAN–Vermutung: Für alle Primzahlen p gilt

$$|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}.$$

Die zahlentheoretische Funktion $\tau(m)$ wird oft RAMANUJANsche *Tau-Funktion* genannt.

Literatur: G. ANDREWS et al: *Ramanujan revisited*. Academic Press, Boston 1988. B. C. BERNDT: *Ramanujan's notebooks I – IV*. Springer-Verlag, New York 1985–1994. B. C. BERNDT, Math. Intel. **10**, No. 3, 24–29 (1988). G.H. HARDY: *Ramanujan*. 3. Aufl., Chelsea, New York 1978. K. G. RAMANATHAN, J. Indian Math. Soc. **51**, 1–25 (1987). S. RAMANUJAN: *Collected Papers*. Chelsea, New York 1962. S. RAMANUJAN: *Notebook I und II*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1957.

4. Die absolute Invariante j ist gemäß I.3.4(8) bzw. I.4.4(1) definiert als Quotient zweier ganzer Modulformen vom Gewicht 12:

$$(1) \quad j := (720 G_4)^3 / \Delta = G_4^{*3} / \Delta^*.$$

j ist sicherlich meromorph (und aus der Nullstellenfreiheit von Δ ergibt sich sogar die Holomorphie) auf \mathbb{H} . Das Transformations–Lemma 1 zusammen mit 2(2) führt zu

$$(2) \quad j(M\tau) = j(\tau) \quad \text{für alle } M \in \Gamma \text{ und } \tau \in \mathbb{H}.$$

Wie in Satz I.4.4A ausgeführt wurde, erhält man aus (1) eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$(3) \quad j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m=0}^{\infty} j_m \cdot e^{2\pi i m\tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

mit $j_m \in \mathbb{Z}$. Zusammengefasst bekommt man den

Satz. j ist eine Modulfunktion, d. h., es gilt

$$j \in \mathbb{K} = \mathbb{V}_0.$$

Das Nullstellen–Lemma 1 ergibt noch

$$(4) \quad j(i) = 12^3 = 1728, \quad j(\rho) = 0.$$

Nach Satz I.6.6 sind die j_m sogar positive ganze Zahlen. Wir geben eine kurze Tabelle: