Bemerkungen. a) Die für 2×2 Matrizen M über einem beliebigen Körper gültige Identität $M^t JM = \det M \cdot J$ zeigt, dass man für die Modulgruppe auch

$$\Gamma = \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ M^t JM = J\}$$

schreiben kann.
b) Im Anschluss an Korollar B kann man zeigen, dass Γ als die Gruppe mit zwei Erzeugenden J und U und den definierenden Relationen $J^4 = U^3 = E$ sowie $J^2U = UJ^2$ beschrieben werden kann. Man vergleiche H. Maass [1983], 54–55.
c) Die Gruppe $PSL(2;\mathbb{Z}) := SL(2;\mathbb{Z})/\{\pm E\}$ ist wegen Proposition 1.1 und Satz 1.3 kanonisch isomorph zur Gruppe der Modulsubstitutionen. Sie wird erzeugt von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto J\tau = -1/\tau$ und $\tau \mapsto U\tau = 1 - 1/\tau$ der Ordnung 2 und 3. Also ist $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ das freie Produkt zweier zyklischer Gruppen der Ordnung 2 und 3.
d) Die Bezeichnung der Matrizen (1) mit J bzw. T (wegen „Involution“ und „Translation“) ist in der Literatur keineswegs verbindlich geregelt. H. Petersson und seine Schüler verwenden die Bezeichnung T bzw. U.

2. Der exakte Fundamentalbereich $\mathbb{F}$. Man definiere

(1) $\mathbb{F} := \left\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau \le \frac{1}{2}\ ,\ |\tau| \ge 1 \text{ und } |\tau| > 1 \text{ für } -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\,\tau < 0\right\}$

und veranschauliche sich $\mathbb{F}$ an der nebenstehenden Figur. Offenbar wird $\mathbb{F}$ von Teilen der Geraden $\mathrm{Re}\,\tau = \pm\frac{1}{2}$ und einem Bogen des Einheitskreises, also von Teilen von Orthogonalkreisen berandet.

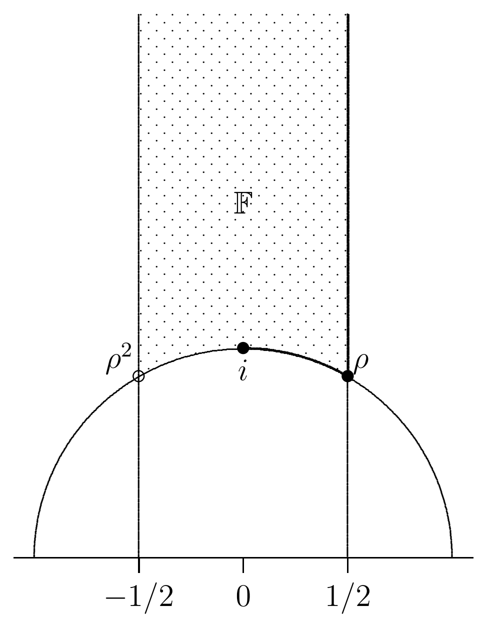

Abb. 16: Der exakte Fundamentalbereich

$$\overline{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| \le \tfrac{1}{2}, |\tau| \ge 1\},$$
$$\mathring{\mathbb{F}} = \{\tau \in \mathbb{H}\,;\ |\mathrm{Re}\,\tau| < \tfrac{1}{2}, |\tau| > 1\}$$

bezeichne die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern von $\mathbb{F}$. Die Randpunkte i und

(2) $\rho := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$ mit $\rho^3 = -1$

gehören zu $\mathbb{F}$, während

$$\rho^2 = \rho - 1 = -\overline{\rho} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$$

zwar zu $\overline{\mathbb{F}}$, aber nicht zu $\mathbb{F}$ gehört. Offenbar gilt

(3) $$\mathrm{Im}\ \tau \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{für alle } \tau \in \overline{\mathbb{F}}.$$

Mit den Bezeichnungen 1(1) und 1(6) erhält man den

10) Aus $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ folgt $\mathbb{S}_k = \Delta \cdot \mathbb{M}_{k-12}$ für gerades $k \geq 0$.
11) $\mathbb{S}_k = \{0\}$ für $k < 12$, $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}, \mathbb{M}_2 = \{0\}$ und $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k = \mathbb{C} \cdot G_k^*$ für $k = 4, 6, 8, 10$.
12) Für gerades $k \geq 0$ gilt

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k = \begin{cases} [\frac{k}{12}], & \text{falls} \quad k \equiv 2 \pmod{12}, \\ [\frac{k}{12}] + 1, & \text{falls} \quad k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

§3. Die Gewichtsformel

1. Ordnungen. Es sei $f \neq 0$ eine Modulform vom Gewicht k im Sinne von **1.3**, also $f \in \mathbb{V}_k$. Für $w \in \mathbb{H}$ existiert dann eine Laurent–Entwicklung

$$(1) \qquad f(\tau) = \sum_{m \geq r} \gamma(m) \cdot (\tau - w)^m \ , \ \gamma(r) \neq 0,$$

die in einer punktierten Umgebung von w absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert. Wie in I.2.1 definiert man die *Ordnung* von f in w durch

$$(2) \qquad \operatorname{ord}_w f := r.$$

Die Funktion f hat also in w eine Nullstelle bzw. einen Pol, je nachdem ob (2) positiv oder negativ ist.

Proposition. *Ist $f \not\equiv 0$ meromorph auf $\mathbb{H}$, so gilt*

$$\operatorname{ord}_z f|_k M = \operatorname{ord}_{Mz} f \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{H} \ \textit{ und } \ M \in SL(2; \mathbb{R}).$$

Insbesondere hat man für $0 \neq f \in \mathbb{V}_k$

$$\operatorname{ord}_z f = \operatorname{ord}_{Mz} f \quad \textit{für alle} \quad z \in \mathbb{H} \ \textit{ und } \ M \in \Gamma.$$

Beweis. Bekanntlich gilt (2), wenn es eine in w holomorphe Funktion g gibt mit

$$f(\tau) = (\tau - w)^r \cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(w) \neq 0.$$

Für $M \in \Gamma$ und $z := M^{-1}w$ folgt dann nach 1.1(1) und II.1.1(6)

$$\begin{aligned} (f|_k M)(\tau) &= (c\tau + d)^{-k} \cdot (M\tau - Mz)^r \cdot g(M\tau) = (\tau - z)^r \cdot h(\tau), \\ h(\tau) &= (c\tau + d)^{-k-r} \cdot (cz + d)^{-r} \cdot g(M\tau) \ . \end{aligned}$$

Hier ist aber h in z holomorph mit $h(z) \neq 0$. □

Wie in 1.2(5) wird die Ordnung von f in ∞ erklärt: Nach (M.3*) besitzt f eine Fourier–Entwicklung der Form

$$(3) \qquad f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} , \quad \alpha_f(m_0) \neq 0,$$

und man setzt

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{ord}_\infty f := m_0.$$

Damit ist $\operatorname{ord}_w f$ speziell für alle w aus

$$\text{(5)} \qquad \mathbb{F}^* := \mathbb{F} \cup \{\infty\}$$

erklärt. Man definiert noch für $w \in \mathbb{F}^*$

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{ord}\ w := \begin{cases} 2 & \text{für } w = i, \\ 3 & \text{für } w = \rho, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach II.2.3 ist die Zahl $2 \cdot \operatorname{ord}\ w$ für $w \in \mathbb{F}$ gleich der Ordnung der Fixgruppe von w

$$\Gamma_w = \{M \in \Gamma\,;\ Mw = w\}$$

(vgl. II.2.3(1)). Die meisten weiteren nicht–trivialen Ergebnisse beruhen nun direkt oder indirekt auf der

Gewichtsformel. *Für eine Modulform $f \neq 0$ vom Gewicht k gilt:*

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\operatorname{ord}\ w} \cdot \operatorname{ord}_w f = \frac{k}{12}.$$

Natürlich ist dies eine endliche Summe, denn die Null- und Polstellen von f können sich wegen (3) in $\mathbb{F}^*$ nicht häufen. Der *Beweis* wird im weiteren Verlauf dieses Paragrafen ausgeführt.

2. Das Umlaufintegral. Sei $0 \neq f \in \mathbb{V}_k$. Wir wollen das die Pole und Nullstellen von f zählende Integral

$$\text{(1)} \qquad \int_\gamma F(\tau)d\tau \quad \text{für} \ \ F := f'/f$$

längs eines Weges γ berechnen, der einem modifizierten Rand des exakten Fundamentalbereiches $\mathbb{F}$ entspricht.

Für alle $w \in \mathbb{H}$ gilt bekanntlich

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{res}_w F = \operatorname{ord}_w f.$$

Ist dagegen f für hinreichend großen Imaginärteil von τ durch 1(3) gegeben, dann erhält man, wenn man die Fourier–Reihe von f' durch die von f dividiert, eine Fourier–Reihe für F der Form

$$\text{(3)} \qquad F(\tau) = 2\pi i \cdot \operatorname{ord}_\infty f + \sum_{m \geq 1} \alpha_F(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Als Weg γ wird nun der wie folgt abgeänderte Rand von $\mathbb{F}$ gewählt:

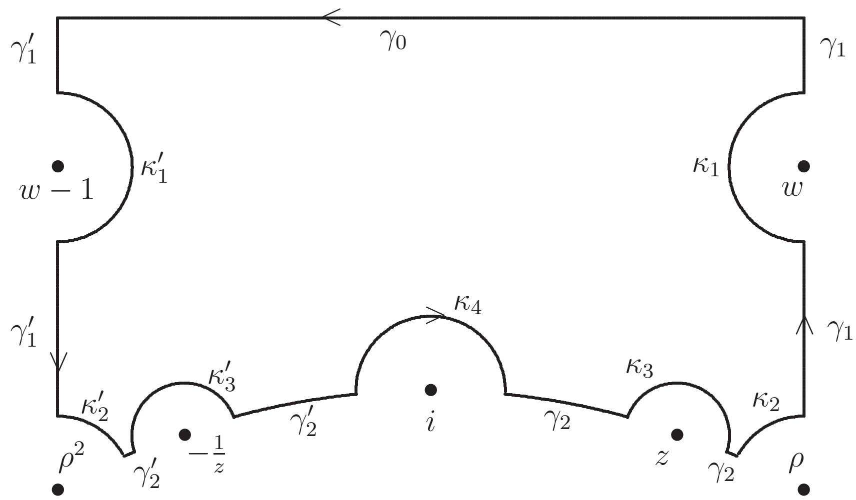

Abb. 23: Integrationsweg

In den Fixpunkten und in denjenigen Randpunkten von $\mathbb{F}$, in denen f eine Null– oder Polstelle besitzt, wird der Rand durch einen Kreisbogen κ bzw. κ' vom Radius $\varepsilon > 0$ ins Innere von $\mathbb{F}$ ersetzt. Dabei ist ε so klein zu wählen, dass außer evtl. im Mittelpunkt weder eine Null– noch eine Polstelle von f im Vollkreis vom Radius ε liegt. Der Weg γ besteht nun aus den Geraden– bzw. Kreisbogenstücken γ_ν, γ_ν' bzw. κ_μ, κ_μ' in dem angegebenen Durchlaufungssinn. Dabei ist γ_0 so zu wählen, dass f in $\{\tau \in \mathbb{H};\, \text{Im}\ \tau \geq y_0\}$ weder Pole noch Nullstellen hat.

Nach Wahl von γ ergibt der Residuensatz wegen (2) nun

(4)
$$2\pi i \cdot \sum_{w \in \mathring{\mathbb{F}}} \text{ord}_w\, f = \int_\gamma F(\tau) d\tau.$$

Man beachte hier, dass die linke Seite von (4) nicht von der Wahl von ε abhängt. Auf der rechten Seite kann daher der Limes $\varepsilon \to 0$ ausgeführt werden.

Da hier gewisse Teile von γ durch Modulsubstitutionen aufeinander bezogen werden können, benötigt man das Verhalten von F bei Modulsubstitutionen. Aus $f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau)$ erhält man durch logarithmische Differentiation

(5)
$$F(M\tau) \cdot \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{kc}{c\tau + d} + F(\tau) \quad \text{für}\ \ M \in \Gamma.$$

3. Die Wege γ_ν' und γ_ν. Nach 2(3) und der Koeffizientendarstellung 1.2(4) gilt zunächst

(1)
$$\int_{\gamma_0} F(\tau) d\tau = -2\pi i \cdot \text{ord}_\infty\, f.$$

Zum Nachweis von

$$\int\limits_{\gamma_1'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_1} F(\tau)d\tau = 0 \quad \text{unabhängig von } \varepsilon \tag{2}$$

hat man zunächst $F(\tau+1) = F(\tau)$ gemäß 2(5). Nun folgt (2), da die Abbildung $\tau \mapsto \tau + 1$ den Weg γ_1' auf den Weg $-\gamma_1$ abbildet, wobei das Minuszeichen die Umkehrung der Orientierung angibt.

Für $M = J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ergibt 2(5)

$$F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} = \frac{k}{\tau} + F(\tau), \tag{3}$$

also

$$\int\limits_{J\sigma} F(\tau)d\tau = \int\limits_{\sigma} F(J\tau) \cdot \frac{dJ\tau}{d\tau} d\tau = k \cdot \int\limits_{\sigma} \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{\sigma} F(\tau)d\tau \tag{4}$$

für jeden Weg σ in $\mathbb{H}$, der keinen Pol von F trifft.

Wegen $\gamma_2' = -(J\gamma_2)$ liefert (4)

$$\int\limits_{\gamma_2'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau = -k \cdot \int\limits_{\gamma_2} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Daraus folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \int\limits_{\gamma_2'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_2} F(\tau)d\tau \Bigg\} = -k \cdot \int_i^\rho \frac{d\tau}{\tau} = 2\pi i \cdot \frac{k}{12}. \tag{5}$$

4. Die Wege κ_μ' und κ_μ. Sind κ_3' bzw. κ_3 die Kreisbogenstücke der Kreise mit Mittelpunkt $-1/z$ bzw. z, so wird

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \int\limits_{\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau \Bigg\} = -2\pi i \cdot \operatorname{ord}_z f. \tag{1}$$

Wegen 3(4) ist hier die linke Seite gleich

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Bigg\{ \int\limits_{J\kappa_3'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_3} F(\tau)d\tau \Bigg\}.$$

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz können die beiden Integrale durch ein Integral über den negativ orientierten Kreis $|\tau - z| = \varepsilon$ ersetzt werden. Damit ist (1) gleich $-2\pi i \cdot \operatorname{res}_z F$. Wegen 2(2) folgt die Behauptung (1).

Zum Nachweis von

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2} F(\tau)d\tau = -\frac{2\pi i}{6}\cdot \mathrm{ord}_\rho f = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2'} F(\tau)d\tau$$

hat man für die linke Seite

$$(*) \qquad -\mathrm{res}_\rho F\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_2}\frac{d\tau}{\tau-\rho}.$$

Hier wählt man $\alpha=\alpha(\varepsilon)\in\mathbb{R}$ mit

$$|e^{i\alpha}-\rho|=\varepsilon\ , \quad \frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

und bezeichnet mit $\varphi=\varphi(\varepsilon)$ den Winkel zwischen $e^{i\alpha}$ und $\rho+i\varepsilon$ (siehe Abb. 24). In $(*)$ substituiert man $\tau=\rho+\varepsilon e^{it}$, $\frac{\pi}{2}+\varphi\le t\le\frac{\pi}{2}$ und erhält für $(*)$

$$i\cdot \mathrm{ord}_\rho f\cdot \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(\varepsilon) = -\frac{\pi i}{3}\cdot \mathrm{ord}_\rho f$$

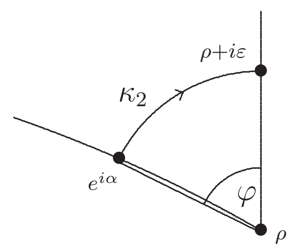

Abb. 24: Der Weg κ_2

wegen 2(2). Damit hat das erste Integral in (2) den behaupteten Wert. Für das zweite Integral geht man entsprechend vor.

Völlig analog erhält man schließlich

$$(3) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\kappa_4} F(\tau)d\tau = -\frac{2\pi i}{2}\cdot \mathrm{ord}_i f$$

sowie

$$(4) \qquad \int\limits_{\kappa_1'} F(\tau)d\tau + \int\limits_{\kappa_1} F(\tau)d\tau = -2\pi i\cdot \mathrm{ord}_w f.$$

Zum *Beweis* der Gewichtsformel geht man nun von 2(4) aus und sammelt die Integrale auf der rechten Seite gemäß den Gleichungen (1), (2) und (5) in **3** sowie (1), (2), (3) und (4). □

Aufgaben. 1) Für $0\ne f\in\mathbb{V}_k$ gilt

$$6\,\mathrm{ord}_i f\ +\ 4\,\mathrm{ord}_\rho f\ \equiv\ k\,(\mathrm{mod}\ 12),\quad \mathrm{ord}_i f\ \equiv\ k/2\,(\mathrm{mod}\ 2)\quad\text{und}\quad \mathrm{ord}_\rho f\ \equiv k/2\,(\mathrm{mod}\ 3).$$

2) Für $0\ne f\in\mathbb{K}$ ist $\mathrm{ord}_i f$ gerade und $\mathrm{ord}_\rho f$ durch 3 teilbar.

3) Ein nicht-konstantes $f\in\mathbb{K}$, das auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, hat bei ∞ einen Pol.