§4. Ganze Modulformen

Als erste Anwendung der Gewichtsformel in **3.1** werden hier die zentralen Ergebnisse aus **1.5** (über ganze Modulformen negativen Gewichts), über die Diskriminante (insbesondere ihr Nichtverschwinden in $\mathbb{H}$ gemäß Satz I.3.4C) und darüber hinaus die Dimensionsformel ohne Bezugnahme auf die Theorie der elliptischen Funktionen bewiesen.

1. Die Dimensionsformel. Wie in **1.4** bezeichne $\mathbb{M}_k$ den $\mathbb{C}$–Vektorraum der ganzen Modulformen vom Gewicht k und $\mathbb{S}_k$ den Unterraum der Spitzenformen aus $\mathbb{M}_k$. In Proposition 1.1 hat man bereits

$$(1) \qquad \mathbb{M}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades } \ k$$

gezeigt. Ist $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$, dann ist f also in $\mathbb{H}$ und bei ∞ holomorph. In der ausführlich geschriebenen Gewichtsformel 3.1,

$$(2) \qquad \tfrac{1}{2}\operatorname{ord}_i f + \tfrac{1}{3}\operatorname{ord}_\rho f + \operatorname{ord}_\infty f + \sum_{w\in\mathbb{F}\setminus\{i,\rho\}} \operatorname{ord}_w f = \frac{k}{12}\,, \qquad 0 \neq f \in \mathbb{M}_k,$$

stehen links daher nur nicht–negative Terme.

Für $k = 4, 6, 8, 10$ ist (2) daher nur lösbar in den Fällen

(3)

k	$\frac{k}{12}$	$\operatorname{ord}_\infty f$	$\operatorname{ord}_i f$	$\operatorname{ord}_\rho f$	f hat Nullstellen bei	der Ordnung
4	1/3	0	0	1	ρ	1
6	1/2	0	1	0	i	1
8	2/3	0	0	2	ρ	2
10	5/6	0	1	1	i und ρ	1

Proposition. *Es gilt:*

a) $\mathbb{M}_k = \{0\}$ *für* $k < 0$.
b) $\mathbb{M}_0 = \mathbb{C}$ *und* $\mathbb{S}_0 = \{0\}$.
c) $\mathbb{M}_2 = \{0\}$.
d) $\mathbb{M}_k = \mathbb{C}\cdot G_k = \mathbb{C}\cdot G_k^*$ *und* $\mathbb{S}_k = \{0\}$ *für* $k = 4, 6, 8$ *und* 10.

Beweis. a) Für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ wäre die linke Seite von (2) negativ.
b) Wäre f nicht konstant, würde die Gewichtsformel für $g = f - f(i) \in \mathbb{M}_0$ einen Widerspruch ergeben.
c) $\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{6}$ ist in nicht–negativen ganzen Zahlen α, β, γ nicht lösbar.
d) Man wendet (3) auf G_k an und sieht nach dem Nullstellen–Lemma 2.1, dass G_k nur an den angegebenen Stellen Nullstellen der entsprechenden Ordnung hat. Dann ist $\frac{f}{G_k} \in \mathbb{M}_0$ für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$, also konstant nach b). □

Korollar A. a) *G_4 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle. Diese liegt bei ρ und ist von* 1. *Ordnung.*
b) *G_6 hat in $\mathbb{F}$ eine einzige Nullstelle. Diese liegt bei i und ist von* 1. *Ordnung.*

Ein Rückgriff auf die Theorie der $\wp$–Funktion zeigt, dass die Diskriminante Δ in $\mathbb{H}$ keine Nullstelle hat. Ohne diese Anleihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen kann man die Nullstellenfreiheit mit der Gewichtsformel direkt einsehen. Zunächst ergibt 2.2(3)

$$\operatorname{ord}_\infty \Delta = 1. \tag{4}$$

Aus (2) erhält man daher den

Satz. *Es gilt* $\Delta(\tau) \neq 0$ *für alle* $\tau \in \mathbb{H}$.

In 1.4(2) war

$$\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{M}_{k+\ell} \quad \text{und} \quad \mathbb{S}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{S}_{k+\ell} \quad \text{für} \quad k, l \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

gezeigt worden. Das entscheidende Hilfsmittel ist nun das

Lemma. *Für gerades* $k \geq 0$ *gilt*

$$\mathbb{S}_k = \Delta \cdot \mathbb{M}_{k-12}.$$

Beweis. Mit (5) gilt zunächst $\Delta \cdot \mathbb{M}_{k-12} \subset \mathbb{S}_k$. Nach dem Satz ist Δ in $\mathbb{H}$ nullstellenfrei. Für $f \in \mathbb{S}_k$ ist dann $g := f/\Delta$ in $\mathbb{H}$ holomorph und modular vom Gewicht $k - 12$. Aus den Fourier–Entwicklungen

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot e^{2\pi i \tau} \cdot (1 + \ldots) \quad \text{und} \quad f(\tau) = e^{2\pi i \tau} \cdot (\alpha_f(1) + \ldots)$$

folgt

$$g(\tau) = f(\tau)/\Delta(\tau) = (2\pi)^{-12} \cdot (\alpha_f(1) + \ldots).$$

Damit hat g bei ∞ keinen Pol und ist demnach eine ganze Modulform. Es folgt $g \in \mathbb{M}_{k-12}$, also $\mathbb{S}_k \subset \Delta \cdot \mathbb{M}_{k-12}$. □

Speziell erhält man mit der Proposition

Korollar B. *Es gilt* $\mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta = \mathbb{C} \cdot \Delta^*$.

Damit ergibt sich schon die

Dimensionsformel. *Für gerades* $k \geq 0$ *ist* $\mathbb{M}_k$ *endlich–dimensional und es gilt*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{M}_k = \begin{cases} \left[\frac{k}{12}\right], & \textit{falls } k \equiv 2 \pmod{12}, \\ \left[\frac{k}{12}\right] + 1, & \textit{falls } k \not\equiv 2 \pmod{12}. \end{cases}$$

Beweis. Nach der Proposition gilt diese Dimensionsformel für $0 \leq k < 12$. Lässt man zunächst die Dimension ∞ für $\mathbb{M}_k$ zu, dann ergibt Satz 2.1b

$$\dim \mathbb{M}_k = 1 + \dim \mathbb{S}_k\,, \; k \geq 4,$$

und das Lemma

$$\dim \mathbb{S}_k = \dim \mathbb{M}_{k-12}\,, \; k \geq 12.$$

Eine Induktion nach k zeigt, dass alle $\mathbb{M}_k$ endlich–dimensional sind und dass

$$\dim \mathbb{M}_k = 1 + \dim \mathbb{M}_{k-12} \quad \text{für} \quad k \geq 12$$

gilt. Da die rechte Seite der Dimensionsformel der gleichen Rekursionsformel genügt, gilt die Formel allgemein. □

Analog zu (3) verwendet man $6 \cdot \mathrm{ord}_i\, f + 4 \cdot \mathrm{ord}_\rho\, f \equiv k \pmod{12}$ für $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ aufgrund von (2) zum Beweis von

(6)

$k \pmod{12}$	0	2	4	6	8	10
$\mathrm{ord}_i\, f \pmod 2$	0	1	0	1	0	1
$\mathrm{ord}_\rho\, f \pmod 3$	0	2	1	0	2	1

Korollar C. *Für* $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$ *gilt* $\mathrm{ord}_\infty\, f < \dim \mathbb{M}_k$.

Anders ausgedrückt besagt dieser Satz, dass aus $\alpha_f(m) = 0$ für $0 \leq m < \dim \mathbb{M}_k$ immer $f = 0$ folgt.

Beweis. Aus der Gewichtsformel ergibt sich bei Beachtung von (6) im Falle $f \neq 0$

$$\frac{k}{12} \geq \begin{cases} \mathrm{ord}_\infty\, f + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,, & \text{falls } k \equiv 2 \pmod{12}\,, \\ \mathrm{ord}_\infty\, f\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

also $\dim \mathbb{M}_k - 1 \geq \mathrm{ord}_\infty\, f$, wenn man die Dimensionsformel verwendet. □

2. Einfache Folgerungen. In Proposition 1 wurden die Vektorräume $\mathbb{M}_k$ für $k \leq 10$ beschrieben. Die Dimensionsformel 1 bzw. Lemma 1 ergeben nun sofort die nächsten Räume beginnend mit

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathbb{M}_{12} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* + \mathbb{C} \cdot \Delta\,, & \mathbb{S}_{12} = \mathbb{C} \cdot \Delta\,, \\ \mathbb{M}_{14} = \mathbb{C} \cdot G_{14}^*\,, & \mathbb{S}_{14} = \{0\}\,, \\ \mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_k^* + \mathbb{C} \cdot \Delta \cdot G_{k-12}^*\,, & \mathbb{S}_k = \mathbb{C} \cdot \Delta \cdot G_{k-12}^* \\ & \text{für } k = 16, 18, 20, 22, 26\,, \\ \mathbb{M}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{24}^* + \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta + \mathbb{C} \cdot \Delta^2\,, & \mathbb{S}_{24} = \mathbb{C} \cdot G_{12}^* \cdot \Delta + \mathbb{C} \cdot \Delta^2 \end{cases}$$

usw. Natürlich bleiben diese Beziehungen gültig, wenn man jeweils die normierte Eisenstein–Reihe G_k^* durch die ursprüngliche Reihe G_k ersetzt.

Hieraus ergeben sich nun sofort eine Fülle von Identitäten: Da als erstes G_4^{*2} zu $\mathbb{M}_8 = \mathbb{C} \cdot G_8^*$ gehört, gibt es eine Konstante γ mit $G_4^{*2} = \gamma \cdot G_8^*$. Da man aber mit den normierten Reihen arbeitet, folgt sofort $\gamma = 1$, also

$$(2) \qquad G_4^{*2} = G_8^*\,, \quad \text{d. h. aber auch} \quad 3 \cdot G_4^2 = 7 \cdot G_8.$$

Bei dieser und den folgenden Relationen für die Reihe G_k beachte man die Tabelle 2.1(8). Analog erhält man

$$(3) \qquad G_4^* \cdot G_6^* = G_{10}^*\,, \quad \text{also} \quad 5 \cdot G_4 \cdot G_6 = 11 \cdot G_{10},$$

$$(4) \qquad G_4^{*2} \cdot G_6^* = G_{14}^*\,, \quad \text{also} \quad 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot G_4^2 \cdot G_6 = 11 \cdot 13 \cdot G_{14}.$$

Im Falle $k = 12$ verwendet man ebenfalls zweckmäßig die normierte Diskriminante Δ^* gemäß 2.2(4).

Lemma. *Es gilt*

$$\Delta^* = \frac{1}{1728}(G_4^{*3} - G_6^{*2}) = \frac{691}{762048}(G_{12}^* - G_6^{*2}) = \frac{691}{432000}(G_4^{*3} - G_{12}^*).$$

Beweis. Hier ist die erste Gleichung nur eine Wiederholung von 2.2(5). Mit den Abkürzungen

$$A := \sum_{m\geq 1} \sigma_{11}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \quad \text{und} \quad B := \sum_{m\geq 1} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

folgt aus 2.1(9) und 2.1(8)

$$(5) \qquad G_{12}^*(\tau) = 1 + \frac{1008 \cdot 65}{691} A \quad \text{und} \quad G_6^*(\tau) = 1 - 504B.$$

Damit wird

$$G_{12}^* - G_6^{*2} = \frac{1008 \cdot (65 + 691)}{691} \cdot e^{2\pi i\tau} + \cdots = \frac{1008 \cdot 756}{691} \cdot e^{2\pi i\tau} + \cdots .$$

Da die linke Seite eine Spitzenform aus $\mathbb{M}_{12}$, also ein Vielfaches von Δ^* ist, folgt die zweite Gleichung. Die dritte Gleichung erhält man analog. □

Eine direkte Konsequenz ist die

Ramanujan–Kongruenz: *Es gilt*

$$\tau(m) \equiv \sigma_{11}(m) \pmod{691} \quad \textit{für alle} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach der zweiten Gleichung im Lemma zusammen mit (5) ist

$$756 \cdot \Delta^* = 65 \cdot A + 691 \cdot F,$$

wobei F eine Fourier–Reihe mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ bezeichnet. Ein Koeffizientenvergleich ergibt die Behauptung. □

Bemerkung. Die Relationen (2), (3) und (4) sind uns bereits aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannt, sie sind Spezialfälle der allgemeinen Rekursionsformel in Korollar I.3.3D.

3. Basen von $\mathbb{M}_k$. Die folgenden Überlegungen werden wieder für die normierten Reihen G_k^* und die normierte Diskriminante Δ^* durchgeführt. Völlig analoge Aussagen gelten für die G_k und Δ. Zur Vereinfachung der Formeln setze man

$$(1) \qquad G_0 := G_0^* := 1\ ,\ G_2 := G_2^* := 0.$$

Ferner sei stets $k \geq 0$ gerade. Eine Iteration von Lemma 1 ergibt sofort das

Lemma. *Es gilt*

$$\mathbb{M}_k = \bigoplus_{0 \le r \le \left[\frac{k}{12}\right]} \mathbb{C} \cdot G^*_{k-12r} \cdot \Delta^{*r}.$$

In Analogie zu $\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G^*_k + \mathbb{S}_k$ hat man die

Proposition. *Für jede Lösung r, s von*

$$4r + 6s = k\ ,\ k \ge 4, \tag{2}$$

in natürlichen Zahlen r, s gilt

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{S}_k \tag{3}$$

und es gibt solche Lösungen r, s.

Beweis. Die Lösbarkeit von (2) ist für $k \equiv 0 \pmod 4$ klar, im Fall $k \equiv 2 \pmod 4$, also $k = 4\ell + 2 \ge 6$, wählt man z. B. $r = \ell - 1$ und $s = 1$. Natürlich ist die rechte Seite von (3) in $\mathbb{M}_k$ enthalten. Für $f \in \mathbb{M}_k$ ist aber $f - \alpha_f(0) \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ eine Spitzenform. □

Satz. *Für $k \ge 4$ gerade gilt*

$$\mathbb{M}_k = \bigoplus_{r,s} \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} G_6^{*s}, \tag{4}$$

wobei über alle natürlichen Zahlen r, s mit $4r + 6s = k$ zu summieren ist.

Beweis. Nach Proposition 1 ist (4) für $4 \le k < 12$ richtig. Mit Lemma 1 und (3) hat man für $k \ge 12$

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{M}_{k-12} \cdot \Delta^* \quad \text{mit} \quad \Delta^* = \frac{1}{1728}(G_4^{*3} - G_6^{*2}).$$

Eine Induktion nach k zeigt, dass die Formen $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ mit $4r + 6s = k$ den Vektorraum $\mathbb{M}_k$ aufspannen. Mit einer Induktion nach k zeigt man auch leicht, dass die Anzahl der Paare $(r, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ mit $4r + 6s = k$ aber gerade $\left[\frac{k}{12}\right]$, falls $k \equiv 2 \pmod{12}$, bzw. $\left[\frac{k}{12}\right] + 1$ ist, falls $k \not\equiv 2 \pmod{12}$. Also bilden die angegebenen Formen eine Basis. □

Man betrachte den $\mathbb{C}$–Vektorraum

$$\mathbb{M} := \bigoplus_{k \text{ gerade}} \mathbb{M}_k = \mathbb{C} \oplus \mathbb{M}_4 \oplus \mathbb{M}_6 \oplus \cdots. \tag{5}$$

Wegen $\mathbb{M}_k \cdot \mathbb{M}_\ell \subset \mathbb{M}_{k+\ell}$ ist $\mathbb{M}$ eine kommutative $\mathbb{C}$–Algebra mit Einselement, die nach (5) *graduiert* ist. Die Darstellung als direkte Summe im Satz ergibt das

Korollar. *Es gilt $\mathbb{M} = \mathbb{C}[G_4^*, G_6^*]$ und G_4^*, G_6^* sind algebraisch unabhängig.*

Speziell gilt also $G_k \in \mathbb{C}[G_4^*, G_6^*]$ für $k \geq 4$. Mit Hilfe der Theorie der $\wp$–Funktion hatte man eine Verschärfung hiervon, nämlich $G_k \in \mathbb{Q}[G_4, G_6]$, bereits in Korollar I.3.3E gesehen.

4*. Ganze Modulformen mit ganzen Fourier–Koeffizienten. Es bezeichne $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ die Menge aller $f \in \mathbb{M}_k$, deren Fourier–Koeffizienten sämtlich ganze Zahlen sind,

$$(1) \qquad f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\ ,\ \tau \in \mathbb{H},\ \alpha_f(m) \in \mathbb{Z} \ \text{ für alle } \ m \geq 0.$$

Offenbar ist $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ein $\mathbb{Z}$–Modul und es gilt

$$(2) \qquad \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \cdot \mathbb{M}_\ell^{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{M}_{k+\ell}^{\mathbb{Z}} \quad \text{für} \quad k, \ell \geq 0.$$

Eine ganze Modulform $f \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ heißt *normiert*, wenn $\alpha_f(0) = 1$ gilt. Aus 2.1(10) und 2.1(11) folgt $G_4^* \in \mathbb{M}_4^{\mathbb{Z}}$, $G_6^* \in \mathbb{M}_6^{\mathbb{Z}}$ und beide Reihen sind normiert. Damit gilt auch

$$G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} \quad \text{für} \quad 4r + 6s = k$$

und alle diese Produkte sind normiert. Man definiert normierte $g_k \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ für $k = 4, 6, 8, 10, 12$ durch

k	4	6	8	10	12
g_k	G_4^*	G_6^*	G_4^{*2}	$G_4^* G_6^*$	G_4^{*3}

Damit hat man

$$\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g_k \quad \text{für} \quad k = 4, 6, 8, 10.$$

Mit Hilfe der normierten Diskriminante Δ^* bekommt man jetzt

Proposition A. *Für $k \geq 12$ gilt*

$$(3) \qquad \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g \oplus \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}} \cdot \Delta^* \quad \textit{mit} \quad \mathbb{M}_0^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \quad \textit{und} \quad \mathbb{M}_2^{\mathbb{Z}} = \{0\}$$

für jedes normierte $g \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$.

Speziell ist also $\mathbb{M}_{12}^{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cdot g_{12} \oplus \mathbb{Z} \cdot \Delta^*$.

Beweis. Zunächst ist die rechte Seite von (3) eine direkte Summe von $\mathbb{Z}$–Moduln und in der linken Seite enthalten. Für $f \in \mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ist $f - \alpha_f(0) \cdot g$ eine Spitzenform in $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$. Da aber $1/\Delta^*$ auf Grund von 2.2(4) Fourier–Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ hat, folgt $f - \alpha_f(0) \cdot g = \Delta^* \cdot h$ mit einem $h \in \mathbb{M}_{k-12}^{\mathbb{Z}}$ aus Proposition I.4.4. □

Eine Induktion nach k ergibt das

Korollar. *$\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ ist ein freier $\mathbb{Z}$–Modul, dessen Rang gleich der Dimension von $\mathbb{M}_k$ ist. Basen von $\mathbb{M}_k^{\mathbb{Z}}$ über $\mathbb{Z}$ erhält man in der Form*

$$(4) \qquad g_\nu \cdot \Delta^{*\nu}\ ,\ 0 \leq \nu \leq \left[\tfrac{k}{12}\right],\ \textit{bzw.}\ 0 \leq \nu < \left[\tfrac{k}{12}\right], \quad \textit{falls } k \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 12),$$

wobei die $g_\nu \in \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12\nu}$ *normiert sind. In der Form* (4) *erhält man gleichzeitig eine Basis des* $\mathbb{C}$*–Vektorraums* $\mathbb{M}_k$*.*

Eine $\mathbb{Z}$–Basis von $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k$, die zugleich eine $\mathbb{C}$–Basis von $\mathbb{M}_k$ ist, nennt man eine *Ganzheitsbasis von* $\mathbb{M}_k$. Speziell ist also (4) eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{M}_k$.

Analog bezeichne $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k := \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k \cap \mathbb{S}_k$ den $\mathbb{Z}$–Modul der Spitzenformen mit ganzzahligen Fourier–Koeffizienten.

Proposition B. $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ *ist ein freier* $\mathbb{Z}$*–Modul.*
a) $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k = \mathbb{Z} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ *für jede Wahl von* $r, s \in \mathbb{N}_0$ *mit* $4r + 6s = k$*.*
b) $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k = \Delta^* \cdot \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$.

Aus einer Ganzheitsbasis von $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$ erhält man so eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$.

Beweis. a) Die Funktionen $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ sind normiert.
b) Zu $f \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ gibt es $g \in \mathbb{M}_{k-12}$ mit $f = g \cdot \Delta^*$. Da aber $(\Delta^*)^{-1}$ nach 2.2(4) und Proposition I.4.4 eine Fourier–Entwicklung mit ganzzahligen Fourier–Koeffizienten besitzt, folgt auch $g \in \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$. □

5*. Darstellung durch Theta–Reihen. Die klassische Theta–Reihe

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

war in E.3 betrachtet worden. In E.3(2) und E.3(3) war

$$(1) \qquad \vartheta(\tau+2) = \vartheta(\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau)$$

gezeigt worden. Direkt aus der Definition ergibt sich noch

$$\vartheta(\tau) + \vartheta(\tau+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}\,(1 + (-1)^n) = 2 \cdot \vartheta(4\tau).$$

Mit (1) erhält man daraus

$$(2) \qquad \vartheta(1-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot (\vartheta(\tau/4) - \vartheta(\tau)) = \sqrt{\tau/i} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1/2)^2 \tau}.$$

Satz. *Für alle* $\tau \in \mathbb{H}$ *gilt*

a) $\vartheta^4(\tau) - \vartheta^4(\tau+1) + \tau^{-2} \cdot \vartheta^4(1-1/\tau) = 0.$

b) $\vartheta^8(\tau) + \vartheta^8(\tau+1) + \tau^{-4} \cdot \vartheta^8(1-1/\tau)$
$= 2 \cdot \vartheta^8(\tau) + 2 \cdot \vartheta^8(\tau+1) - 2 \cdot \vartheta^4(\tau)\vartheta^4(\tau+1) = 2 \cdot G_4^*(\tau).$

c) $[\vartheta^4(\tau) + \vartheta^4(\tau+1)] \cdot [\frac{5}{2} \cdot \vartheta^4(\tau)\vartheta^4(\tau+1) - \vartheta^8(\tau) - \vartheta^8(\tau+1)] = G_6^*(\tau).$

d) $\tau^{-4} \cdot \vartheta^8(\tau) \cdot \vartheta^8(\tau+1) \cdot \vartheta^8(1-1/\tau) = 2^8 \cdot \Delta^*(\tau).$

Beweis. a) Die linke Seite wird mit $f(\tau)$ bezeichnet. Dann verifiziert man mit (1) sofort $f(\tau+1) = -f(\tau)$ und $f(-1/\tau) = -\tau^2 \cdot f(\tau)$. Mit (2) folgt dann, dass