$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für} \quad M \in \Gamma \tag{4}$$

ist dann charakteristisch für die so genannten *Modulformen*. Da die Gruppe der Modulsubstitutionen gemäß Korollar II.2.1A durch die Abbildungen

$$\tau \longmapsto \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau \longmapsto -1/\tau \tag{5}$$

erzeugt wird, kann man (4) durch die beiden Bedingungen

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau) \tag{6}$$

ersetzen.

In I.4.1 hatten wir gesehen, dass die EISENSTEIN–Reihen G_k Beispiele von solchen Funktionen sind. Es soll noch ein weiteres Beispiel skizziert werden, das ein zu (6) analoges Transformationsverhalten besitzt:

3. Die klassische Theta–Reihe. In seinen Briefen an GOLDBACH vom 4. 5. 1748 und 17. 8. 1750 behandelt L. EULER im Reellen bereits die *Theta–Reihe*

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{mit} \quad q := e^{\pi i \tau} \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung tritt die Theta–Reihe dann bei J. FOURIER in *Théorie Analytique de la Chaleur* (Paris 1822) auf (vgl. I.6.7). Im Nachlass von C.F. GAUSS (*Werke III*, 436–445) fand man eine Note etwa aus dem Jahre 1808, in der eine etwas allgemeinere Reihe (nämlich die in I.6.7(1) definierte JACOBIsche Theta–Reihe $\vartheta(z;\tau)$) betrachtet und für sie bereits eine Transformationsformel bewiesen wird. In den *Fundamenta nova* wird dann von C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 198–239) die allgemeine Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nx)$$

unter dem Buchstaben Θ eingeführt und zur Darstellung der elliptischen Funktionen verwendet. In der Bezeichnung von I.6.7 ist $\vartheta(\tau)$ gleich dem *Nullwert* $\vartheta(0;\tau)$.

Offenbar ist $\vartheta(\tau)$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{H}$, so dass $\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Es gilt darüber hinaus

$$\vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}. \tag{2}$$

Die Bedeutung und das Interesse, das die Theta–Reihe immer wieder gefunden hat, liegen nun in der so genannten

Theta–Transformationsformel:

$$\vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv ist.

Beweis. Man wendet die so genannte POISSONsche Summationsformel auf $\vartheta(iy)$, $y > 0$, an oder – was auf dasselbe hinausläuft – entwickelt die modulo 1 periodische, stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in eine FOURIER–Reihe und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta(iy) &= \varphi(0) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m, \\ \alpha_m &:= \int_0^1 \varphi(t)\cdot e^{-2\pi imt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y}\cdot e^{-2\pi imt}dt. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\alpha_m = \beta_m(y)\cdot e^{-\pi m^2/y} \quad \text{mit} \quad \beta_m(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t\sqrt{y}+im/\sqrt{y}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\beta_{m/\sqrt{y}}(1).$$

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz hängt $\beta_m(1) = \beta$ nicht von m ab (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.3) und man erhält

$$\vartheta(iy) = \frac{\beta}{\sqrt{y}}\cdot\vartheta\left(\frac{i}{y}\right) \quad \text{für } y > 0.$$

Setzt man nun $y = 1$, so folgt $\beta = 1$ wegen $\vartheta(iy) > 0$. Die Transformationsformel ergibt sich nun durch analytische Fortsetzung. □

Einen elementaren Beweis der POISSONschen Summationsformel findet man z. B. bei M. KOECHER [1987], 179–181.

Betrachtet man jetzt $f(\tau) := \vartheta^8(\tau)$, so erhält man in Analogie zu 2(6)

(4) $$f(\tau+2) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^4\cdot f(\tau).$$

Damit kennt man das Transformationsverhalten von $f = \vartheta^8$ unter der von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto \tau + 2$ und $\tau \mapsto -1/\tau$ erzeugten Gruppe von Automorphismen von $\mathbb{H}$. Mit der *Theta–Gruppe* Γ_ϑ in II.3.4 folgt

$$f(M\tau) = (c\tau+d)^4\cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma_\vartheta.$$

Ein anderer – ebenfalls durch II.3.4 nahegelegter – Ansatz liefert eine Funktion, bei der man das Transformationsverhalten unter allen Modulsubstitutionen kennt: Man setzt

(5) $$g(\tau) := \tfrac{1}{\tau}\cdot\vartheta^2(\tau)\cdot\vartheta^2(\tau+1)\cdot\vartheta^2(1-1/\tau)$$

und verifiziert mit (2) und (3)

$$g(\tau+1) = i\cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(-1/\tau) = i\cdot\tau^3\cdot g(\tau).$$

Die vierte Potenz von g ist daher eine Modulform im Sinne von 2(6) zu $k = 12$. Man vergleiche Satz 4.5 d).

wobei die $g_\nu \in \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12\nu}$ *normiert sind. In der Form* (4) *erhält man gleichzeitig eine Basis des* $\mathbb{C}$*–Vektorraums* $\mathbb{M}_k$.

Eine $\mathbb{Z}$–Basis von $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k$, die zugleich eine $\mathbb{C}$–Basis von $\mathbb{M}_k$ ist, nennt man eine *Ganzheitsbasis von* $\mathbb{M}_k$. Speziell ist also (4) eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{M}_k$.

Analog bezeichne $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k := \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k \cap \mathbb{S}_k$ den $\mathbb{Z}$–Modul der Spitzenformen mit ganzzahligen FOURIER–Koeffizienten.

Proposition B. $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ *ist ein freier* $\mathbb{Z}$*–Modul.*
a) $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_k = \mathbb{Z} \cdot G_4^{*r} \cdot G_6^{*s} \oplus \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ *für jede Wahl von* $r, s \in \mathbb{N}_0$ *mit* $4r + 6s = k$.
b) $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k = \Delta^* \cdot \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$.

Aus einer Ganzheitsbasis von $\mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$ erhält man so eine Ganzheitsbasis von $\mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$.

Beweis. a) Die Funktionen $G_4^{*r} \cdot G_6^{*s}$ sind normiert.
b) Zu $f \in \mathbb{S}^{\mathbb{Z}}_k$ gibt es $g \in \mathbb{M}_{k-12}$ mit $f = g \cdot \Delta^*$. Da aber $(\Delta^*)^{-1}$ nach 2.2(4) und Proposition I.4.4 eine FOURIER–Entwicklung mit ganzzahligen FOURIER–Koeffizienten besitzt, folgt auch $g \in \mathbb{M}^{\mathbb{Z}}_{k-12}$. □

5*. Darstellung durch Theta–Reihen. Die klassische Theta–Reihe

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

war in E.3 betrachtet worden. In E.3(2) und E.3(3) war

$$(1) \qquad \vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau)$$

gezeigt worden. Direkt aus der Definition ergibt sich noch

$$\vartheta(\tau) + \vartheta(\tau+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} \left(1 + (-1)^n\right) = 2 \cdot \vartheta(4\tau).$$

Mit (1) erhält man daraus

$$(2) \qquad \vartheta(1 - 1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot (\vartheta(\tau/4) - \vartheta(\tau)) = \sqrt{\tau/i} \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i (n+1/2)^2 \tau}.$$

Satz. *Für alle* $\tau \in \mathbb{H}$ *gilt*

a) $\vartheta^4(\tau) - \vartheta^4(\tau+1) + \tau^{-2} \cdot \vartheta^4(1 - 1/\tau) = 0.$

b) $\vartheta^8(\tau) + \vartheta^8(\tau+1) + \tau^{-4} \cdot \vartheta^8(1 - 1/\tau)$
$= 2 \cdot \vartheta^8(\tau) + 2 \cdot \vartheta^8(\tau+1) - 2 \cdot \vartheta^4(\tau)\vartheta^4(\tau+1) = 2 \cdot G_4^*(\tau).$

c) $[\vartheta^4(\tau) + \vartheta^4(\tau+1)] \cdot [\frac{5}{2} \cdot \vartheta^4(\tau)\vartheta^4(\tau+1) - \vartheta^8(\tau) - \vartheta^8(\tau+1)] = G_6^*(\tau).$

d) $\tau^{-4} \cdot \vartheta^8(\tau) \cdot \vartheta^8(\tau+1) \cdot \vartheta^8(1 - 1/\tau) = 2^8 \cdot \Delta^*(\tau).$

Beweis. a) Die linke Seite wird mit $f(\tau)$ bezeichnet. Dann verifiziert man mit (1) sofort $f(\tau+1) = -f(\tau)$ und $f(-1/\tau) = -\tau^2 \cdot f(\tau)$. Mit (2) folgt dann, dass

$f^2 \in \mathbb{M}_4$ den konstanten FOURIER-Koeffizienten 0 hat. Also gilt $f^2 = 0$ und damit $f = 0$ nach Proposition 1.
b), c) Man geht analog vor und verwendet a).
d) Analog zeigt man, dass die linke Seite zu $\mathbb{M}_{12}$ gehört. Wegen (2) ist der konstante FOURIER-Koeffizient 0 und derjenige von $e^{2\pi i\tau}$ gerade 2^8. Dann erhält man die Behauptung aus Korollar 1B. □

Teil d) und Satz 1 implizieren sofort das

Korollar. *Es gilt* $\vartheta(\tau) \neq 0$ *für alle* $\tau \in \mathbb{H}$.

Bemerkungen. a) Nach dem Satz kann man jedes $f \in \mathbb{M}_k$ als homogenes, symmetrisches Polynom in $\vartheta^4(\tau)$ und $\vartheta^4(\tau+1)$ darstellen.
b) Aus (1) und Korollar II.3.4 folgt $\vartheta^8|_4 M = \vartheta^8$ für alle $M \in \Gamma_\vartheta$. Dann erhält man die Teile b) und d) des Satzes auch in der Form

$$\sum_{M:\Gamma_\vartheta\backslash\Gamma} \vartheta^8|_4 M = 2 \cdot G_4^*, \qquad \prod_{M:\Gamma_\vartheta\backslash\Gamma} \vartheta^8|_4 M = 2^8 \cdot \triangle^*.$$

c) Mit (2) ergibt sich für $r = a/c \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}\,(a,c) = 1$

$$\lim_{y\downarrow 0} |\vartheta(r+iy)| = \begin{cases} \infty, & \text{falls ac gerade,} \\ 0, & \text{falls ac ungerade.} \end{cases}$$

P. ULLRICH (Res. Math. **31**, 245-265 (1997)) hat gezeigt, wie man aus dieser Abschätzung leicht folgern kann, dass die stetige RIEMANNsche Funktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2\pi x}{n^2}$$

in den Punkten der in $\mathbb{R}$ dichten Teilmenge $\{a/c\ ;\ a, c \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}\}$ nicht differenzierbar ist.

6*. Der Differential–Kalkül. Ist $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ meromorph und $f \not\equiv 0$, so ist auch die logarithmische Ableitung $f'/f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ wieder meromorph. Aus $f(M\tau) = (c\tau+d)^k \cdot f(\tau)$ für $M \in \Gamma$ folgt durch logarithmische Differentiation

$$\text{(1)} \qquad \frac{f'}{f}(M\tau) \cdot \frac{dM\tau}{d\tau} = \frac{kc}{c\tau+d} + \frac{f'}{f}(\tau) \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Speziell ergibt sich:

(2) Für $f \in \mathbb{K}$ gehören f' und f'/f zu $\mathbb{V}_2$.

Wenn f für $\mathrm{Im}\,\tau > \gamma$ mit $\gamma > 0$ in eine FOURIER–Reihe der Form

$$\text{(3)} \qquad f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\ ,\ \alpha_f(m_0) \neq 0,$$

man R. REMMERT [1995], 10.2.2, wo die Aussage aus dem Satz von BLOCH gefolgert wird.

Aufgaben. 1) Zu jedem $f \in \mathbb{V}_k$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{C}[j]$, so dass $\varphi \cdot f$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.
2) Man gebe eine biholomorphe Abbildung zwischen $\overset{\circ}{\mathbb{F}}$ und $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$ an.
3) $(2\pi i)^2 \cdot G_4^* = \frac{j'^2}{j(j-1728)}$.
4) $(-2\pi i)^3 \cdot G_6^* = \frac{j'^3}{j^2(j-1728)}$.
5) Sei $w \in \mathbb{H}$ mit $G_{12}^*(w) = 0$. Dann gilt $(2\pi i)^6 \cdot G_{12}^* = \frac{j-j(w)}{j^4(j-1728)^3} j'^6$.
6) $(2\pi i)^6 \cdot \Delta^* = \frac{j'^6}{j^4(j-1728)^3}$.
7) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_4^{*3}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ ist vom Betrag 1.
8) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_6^{*2}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ liegt auf der imaginären Achse.
9) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{F}$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so existiert ein auf $\mathbb{H}$ holomorphes $f \in \mathbb{K}$ mit $f(\tau_j) = \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n$.
10) Eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ nimmt jeden Wert mit höchstens 2 Ausnahmen an.
11) Sind f und g ganze Funktionen mit $e^{f(z)} + e^{g(z)} = 1$, so sind f und g konstant.

§6. Die DEDEKINDsche η–Funktion

Die Produktformel der Diskriminante ist die einzige verbleibende Anleihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Im Folgenden wird auch hierfür ein direkter Beweis gegeben. Wegen der prinzipiellen Bedeutung dieser Produktformel gehen wir auch auf andere Beweismöglichkeiten ein.

1. Die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe. Nach dem Vorbild von G. EISENSTEIN (vgl. I.3.7) definiert man die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe

$$(1) \qquad G_2(\tau) := \sum_{n \neq 0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \Bigg(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Bigg), \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

In Analogie zu Satz I.4.2 (aber im Gegensatz zu 4.3(1)) hat man zunächst die

Proposition. *Die Funktion $G_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \Bigg(1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau} \Bigg).$$

Beweis. Mit der Proposition I.4.2 bekommt man

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= 2\zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \Bigg(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Bigg) \\ &= 2\zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{r \geq 1} r \cdot e^{2\pi i r m \tau}\ . \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der letzten Reihe darf man hier alle Terme m und r mit $rm = n$ zusammenfassen. Man verwendet noch $\zeta(2) = \pi^2/6$. Offenbar stellt die FOURIER–Reihe eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ dar. □

Manchmal ist es zweckmäßig, die normierte Version zu betrachten

$$G_2^*(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot G_2(\tau) = 1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau}. \tag{2}$$

Die Funktion G_2 ist zwar keine Modulform, wir können aber ihr Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen übersehen. Man hat $G_2(\tau+1) = G_2(\tau)$ und den

Satz. *Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$G_2(-1/\tau) = \tau^2 \cdot G_2(\tau) - 2\pi i \tau.$$

Beweis. Die Gleichung (1) schreibt man als

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right) + 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \left((m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2}\right)$$

und bekommt

$$G_2(-1/\tau) = \frac{\pi^2}{3} \cdot (1 + \tau^2) + 2\tau^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \left((n\tau - m)^{-2} + (n\tau + m)^{-2}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$F(\tau) := \frac{1}{2\tau^2} \cdot \left(\tau^2 G_2(\tau) - G_2(-1/\tau)\right) = \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} A_{mn} - \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} A_{mn} \tag{$*$}$$

mit

$$A_{mn} := (m\tau + n)^{-2} + (m\tau - n)^{-2}.$$

Die Reihen auf der rechten Seite von $(*)$ sind nicht absolut konvergent, die Summation darf also nicht vertauscht werden. Man geht wie folgt vor: Für

$$\begin{aligned} B_{mn} :&= \frac{1}{m\tau + n - 1} - \frac{1}{m\tau + n} + \frac{1}{m\tau - n} - \frac{1}{m\tau - n + 1}, \quad m \geq 1 \text{ und } n \geq 1, \\ &= \frac{1}{(m\tau + n)(m\tau + n - 1)} + \frac{1}{(m\tau - n)(m\tau - n + 1)} \end{aligned}$$

gilt nach Proposition 2.1

$$A_{mn} - B_{mn} = \mathcal{O}\left((m^2 + n^2)^{-3/2}\right) = \mathcal{O}\left(m^{-3/2} \cdot n^{-3/2}\right),$$

wenn man $m^2 + n^2 > mn$ beachtet. Wegen der absoluten Konvergenz folgt

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_{mn}-B_{mn})=\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}(A_{mn}-B_{mn}),$$

und $(*)$ ergibt

$$(**)\qquad F(\tau)=\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}B_{mn}-\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}B_{mn}.$$

Da sich die Terme abwechselnd wegheben, hat man sofort

$$\sum_{n\geq 1}B_{mn}=0.$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned}\tau\cdot\sum_{m\geq 1}B_{mn}&=\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m+(n-1)/\tau}-\frac{1}{m+n/\tau}+\frac{1}{m-n/\tau}-\frac{1}{m-(n-1)/\tau}\right)\\&=\sum_{m\geq 1}\left(\frac{2(n-1)/\tau}{[(n-1)/\tau]^2-m^2}-\frac{2n/\tau}{[n/\tau]^2-m^2}\right)=\varphi(n-1)-\varphi(n)\ ,\end{aligned}$$

wobei aufgrund der Partialbruchentwicklung des Cotangens (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 11.2.1)

$$\varphi(\xi):=\begin{cases}\pi\cot(\pi\xi/\tau)-\dfrac{1}{\xi/\tau} & \text{für }\ \xi\neq 0,\\ 0 & \text{für }\ \xi=0\end{cases}$$

gilt. Nach $(**)$ folgt daher

$$\tau\cdot F(\tau)=-\tau\cdot\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}B_{mn}=-\sum_{n\geq 1}(\varphi(n-1)-\varphi(n))=-\varphi(0)+\lim_{n\to\infty}\varphi(n).$$

Für $z=x+iy$ gilt

$$\cot z=i\cdot\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{e^{ix-y}-e^{-ix+y}},\quad \text{also}\quad \lim_{y\to-\infty}\cot z=i.$$

Wegen Im $(1/\tau)<0$ folgt $\tau\cdot F(\tau)=\pi i$, also die Behauptung. □

Bemerkung. Die Idee dieses Beweises findet man bereits bei G. EISENSTEIN (*Math. Werke I*, 357–478); eine präzise Durchführung der Beweisidee gibt wohl erstmals A. HURWITZ in seiner Dissertation (*Math. Werke I*, 23–26). Man vergleiche R. FUETER [1924], 21–23, J.–P. SERRE [1973], 95–96, und N. KOBLITZ [1993], Proposition III.2.7.

2. Das Transformationsverhalten von η. Nach R. DEDEKIND (*Ges. math. Werke I*, 159–173) definiert man eine holomorphe Funktion $\eta:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ durch

$$(1)\qquad \eta(\tau):=e^{\pi i\tau/12}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i m\tau}).$$