$$|f(\tau)| \leq C \cdot e^{-2\pi m_0 \cdot \operatorname{Im}\tau} \quad \textit{für alle } \tau \textit{ mit} \quad \operatorname{Im}\tau \geq \gamma + \varepsilon.$$

Dabei ist m_0 das Minimum der $m \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha_f(m) \neq 0$.

Ist dies der Fall und ist f auf $\mathbb{H}$ holomorph, dann gilt (b) *für alle $\gamma > 0$.*

Beweis. Alles wird auf das Verhalten von $\hat{f}$ in einer Umgebung von 0 zurückgespielt: Man hat für $\hat{f}$ genau dann ein LAURENT–Reihe der Form (2), wenn eine Abschätzung der Gestalt $|\hat{f}(z)| \leq C \cdot |z|^{m_0}$ gilt. □

Ist m_0 wie im Lemma gewählt, so sagt man in Übereinstimmung mit dem Verhalten von $\hat{f}$ bei 0, *dass f bei ∞*

einen Pol der Ordnung $-m_0$ hat, falls $m_0 < 0$ gilt,
holomorph ist, falls $m_0 \geq 0$ gilt,
eine Nullstelle der Ordnung m_0 hat, falls $m_0 > 0$ gilt.

Man setzt nun natürlich

(5) $$\operatorname{ord}_\infty f := m_0.$$

3. Der Begriff der Modulform. Eine Funktion f heißt *Modulform vom Gewicht k,* wenn f modular vom Gewicht k ist und bei ∞ höchstens einen Pol hat, wenn also gilt:

(M.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(M.2) $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

Wegen Lemma 2 kann hier (M.3) ersetzt werden durch

(M.3*) f besitzt eine FOURIER–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m \tau},$$

die bei geeignetem $\gamma > 0$ für $\operatorname{Im}\tau \geq \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergiert.

Da mit f und g auch $\alpha f + \beta g$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, und $f \cdot g$ höchstens einen Pol bei ∞ haben, ergibt ein Blick auf 1(1), *dass die Modulformen vom Gewicht k einen Vektorraum $\mathbb{V}_k$ über $\mathbb{C}$ bilden.* Es gilt außerdem

(1) $$\mathbb{V}_k \cdot \mathbb{V}_\ell \subset \mathbb{V}_{k+\ell} \qquad \textit{für} \quad k, \ell \in \mathbb{Z}.$$

Wegen Proposition 1 hat man natürlich

(2) $$\mathbb{V}_k = \{0\} \quad \text{für ungerades} \quad k.$$

Schließlich ist

(3) $$\tfrac{1}{f} \in \mathbb{V}_{-k} \qquad \text{für} \quad 0 \neq f \in \mathbb{V}_k \ .$$

Eine Modulform vom Gewicht 0 heißt eine *Modulfunktion*. Wegen (1) und (3) ist die Menge

(4) $$\mathbb{K} := \mathbb{V}_0$$

aller Modulfunktionen ein Körper, der die konstanten Funktionen und alle Quotienten von Modulformen desselben Gewichts enthält.

Bemerkungen. a) Der Name *Modulfunktion* stammt von R. Dedekind (*Ges. math. Werke I*, 159–172). Eine Modulfunktion tritt zunächst als *Modul* bei elliptischen Integralen in der Legendreschen Normalform auf. Es handelt sich dabei allerdings um eine Funktion, die nicht zur Modulgruppe Γ, sondern zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[2]$ gehört (vgl. I.E.2, Korollar I.3.4E, Aufgabe I.4.7). Modulformen treten systematisch zuerst bei Weierstrass in seinen Vorlesungen über elliptische Funktionen als die Invarianten g_2 und g_3 bzw. als Δ auf (vgl. I.4.1), nachdem diese vorher von G. Eisenstein betrachtet wurden (vgl. I.3.7).
Eigentliche Begründer der Theorie der Modulfunktionen sind F. Klein und H. Poincaré. Die Hauptwerke von Poincaré zu diesem Thema findet man in den ersten Bänden der Acta Mathematica (nämlich in Band 1, 3, 4, 5) und in seinen *Œuvres II*. Wichtige Arbeiten von Klein findet man in seinen *Ges. math. Abhandlungen III*. Die Theorie wurde dann zunächst von R. Fricke fortgeführt, von dem der ausführliche Übersichtsartikel II.B4 *Automorphe Funktionen* in der *Enzyklopädie der Math. Wissenschaften* stammt.
b) Auf R. Dedekind geht die abkürzende Schreibweise $1^\tau := e^{2\pi i\tau}$ zurück (*Ges. math. Werke I*, 174–201), die auch später manchmal verwendet wird, sich aber allgemein nicht durchgesetzt hat.

4. Ganze Modulformen. Eine Modulform f vom Gewicht k heißt eine *ganze Modulform vom Gewicht* k, wenn f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist und wenn f bei ∞ *keinen* Pol hat. Damit ist f genau dann eine ganze Modulform vom Gewicht k, wenn gilt:

(M.1') $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph.

(M.2') $f|_k M = f$ für alle $M \in \Gamma$.

(M.3') f ist für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $\operatorname{Im} \tau \geq \gamma$, $\gamma > 0$, beschränkt.

Wegen Lemma 2 kann man hier (M.3') ersetzen durch

(M.3") f besitzt eine Fourier–Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq 0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau},$$

Die Algebra $\mathbb{M}$ ist isomorph zur Quotientenalgebra der symmetrischen Polynome über $\mathbb{C}$ in X, Y, Z nach dem von $X + Y + Z$ erzeugten Ideal.
6) Sei $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei $\{v_0, \ldots, v_m\}$, $m = n^2 - 1$, das Vertretersystem aus Proposition I.7.1 mit $v_0 = 0$. Zu $f \in \mathbb{M}_k$ gibt es ein symmetrisches Polynom $P(X_1, \ldots, X_m)$ vom Gewicht $k/2$ mit $P(\wp(v_1; \tau, 1), \ldots, \wp(v_m; \tau, 1)) = f(\tau)$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$.
7) Sei $k \geq 12$ gerade, $k \not\equiv 2 \pmod{12}$. Dann gibt es genau ein $f \in \mathbb{M}_k$, für dessen FOURIER–Koeffizienten gilt $\alpha_f(0) = 1$, $\alpha_f(m) = 0$ für $1 \leq m \leq \left[\frac{k}{12}\right]$.
8) Ist $f \in \mathbb{M}_k$ mit $\alpha_f(m) \in \mathbb{Q}$ für alle $m \geq 0$, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\lambda \cdot \alpha_f(m) \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$.
9) $G_{12}(i) \neq 0$ und $G_{12}(\rho) \neq 0$.
10) Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathbb{M}_k \cdot x^k = \frac{1}{(1-x^4)(1-x^6)}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \dim \mathbb{S}_k \cdot x^k = \frac{x^{12}}{(1-x^4)(1-x^6)}$ für $|x| < 1$.
11) Es gibt genau dann ein $f \in \mathbb{M}_k$ mit $f(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, wenn $k = 12l$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall gilt $f(\tau) = c \cdot \Delta(\tau)^l$ für ein $0 \neq c \in \mathbb{C}$.

§5. Modulfunktionen

1. Die Gewichtsformel für Modulfunktionen. Als zweite Anwendung betrachten wir die Gewichtsformel 3.1 für den Fall $k = 0$. Jede Modulfunktion $f \neq 0$, also $0 \neq f \in \mathbb{K}$, erfüllt die **Gewichtsformel**

$$\sum_{w \in \mathbb{F}^*} \frac{1}{\text{ord } w} \cdot \text{ord}_w f = 0. \tag{1}$$

Lemma. *Ist $f \in \mathbb{K}$ auf $\mathbb{F}^*$ holomorph, dann ist f konstant.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist im Falle $f \neq 0$ stets $\text{ord}_w f \geq 0$, also $\text{ord}_w f = 0$ nach (1). Dies bedeutet $f(w) \neq 0$ für alle $w \in \mathbb{F}^*$. Da mit f auch $f - f(i)$ zu $\mathbb{K}$ gehört, ist f konstant. □

Wendet man nun (1) auf $f - z$ anstelle von f an, so folgt der

Satz. *Ist $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant, dann hat f Pole in $\mathbb{F}^*$. Ist f in i und ρ holomorph, so ist für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq f(i)$ und $z \neq f(\rho)$ die Anzahl der z–Stellen in $\mathbb{F}^*$ gleich der Anzahl der Pole in $\mathbb{F}^*$ (jeweils mit Vielfachheiten gezählt).*

2. Anwendung auf die absolute Invariante. Gemäß 2.4(1), 2.4(3) sowie Satz 4.1 gilt

$$j = G_4^{*3}/\Delta^*, \quad \text{ord}_\infty j = -1 \quad \text{sowie} \quad \text{ord}_w j \geq 0 \quad \text{für alle} \quad w \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Für $z \in \mathbb{C}$ wendet man die Gewichtsformel 1(1) an auf $f := j - z$ und bekommt

$$\sum_{w \in \mathbb{F}} \frac{1}{\text{ord } w} \cdot \text{ord}_w(j - z) = 1. \tag{2}$$

Satz A. *Die Funktion* $j : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ *ist holomorph und nimmt in* $\mathbb{F}$ *jeden Wert aus* $\mathbb{C}$ *an. Genauer gilt:*
a) *Jede von* 0 *und* $12^3 = 1728$ *verschiedene komplexe Zahl wird in* $\mathbb{F} \setminus \{i, \rho\}$ *genau einmal und von erster Ordnung angenommen.*
b) $j - 1728$ *hat an der Stelle* $\tau = i$ *eine Nullstelle der Ordnung* 2 *und es gilt* $j(\tau) \neq 1728$ *für alle* $\tau \in \mathbb{F} \setminus \{i\}$.
c) j *hat an der Stelle* $\tau = \rho$ *eine Nullstelle der Ordnung* 3 *und es gilt* $j(\tau) \neq 0$ *für alle* $\tau \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}$.

Beweis. c) Man wählt $z = 0$ in (2). Wegen 2.4(4) ist $j(\rho) = 0$, also $\operatorname{ord}_\rho j \geq 1$. Damit ist die linke Seite von (2) größer oder gleich $1/3$ und es folgt $j(\tau) \neq 0$ für $\tau \in \mathbb{F} \setminus \{\rho\}$, denn sonst wäre die linke Seite von (2) wegen $j(i) \neq 0$ größer oder gleich $1 + 1/3$.
b) Man geht analog vor.
a) Wegen $z \neq 0$ und $z \neq 1728$ bringen $w = i$ und $w = \rho$ keinen Anteil in (2). □

Korollar A. *Die Abbildung* $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$ *ist eine Bijektion.*

Jede rationale Funktion in j ist eine Modulfunktion. Hiervon gilt auch die Umkehrung:

Satz B. *Es gilt* $\mathbb{K} = \mathbb{C}(j)$.

Beweis. Sei $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant. Für komplexe Zahlen $u \neq v$ betrachte man die Funktion

$$g(\tau) := \frac{f(\tau) - u}{f(\tau) - v}.$$

Da sich hier die Pole von f herausheben, hat g in $\mathbb{F}$ (gezählt mit Vielfachheiten) Nullstellen bei den Nullstellen p_ν von $f - u$ und Pole bei den Nullstellen q_μ von $f - v$. Man kann daher $u \neq v$ so wählen, dass g an den Stellen i und ρ holomorph und ungleich Null ist. Nach Satz 1 stimmen die Anzahlen der Null– bzw. Polstellen überein. Im Hinblick auf Satz A haben g und h,

$$h(\tau) = \prod_\nu \frac{j(\tau) - j(p_\nu)}{j(\tau) - j(q_\nu)},$$

gleiche Nullstellen und Pole in $\mathbb{F}^*$, so dass sich g und h nach Lemma 1 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Es folgt $g \in \mathbb{C}(j)$ und damit auch

$$f = \frac{vg - u}{g - 1} \in \mathbb{C}(j).$$

□

Korollar B. *Ein* $f \in \mathbb{K}$ *ist genau dann auf* $\mathbb{H}$ *holomorph, wenn* f *ein Polynom in* j *ist.*

Ist $k \geq 4$ gerade und sind $g, h \in \mathbb{M}_k$ mit $h \neq 0$ gegeben, dann gilt $\frac{g}{h} \in \mathbb{K}$. Umgekehrt hat man den

Satz C. *Jede Modulfunktion ist Quotient zweier ganzer Modulformen gleichen Gewichts.*

Beweis. Ist $f \in \mathbb{K}$ nicht konstant, so schreibe man $f = \frac{P(j)}{Q(j)}$ mit Polynomen P und Q gemäß Satz B. Bezeichnet r das Maximum der Grade von P und Q, dann sind $P(j) \cdot \Delta^r$ und $Q(j) \cdot \Delta^r$ ganze Modulformen vom Gewicht $12r$. □

Bemerkung. Um die ungewöhnliche Zahl $12^3 = 1728$ zu vermeiden, betrachtet man manchmal auch die Funktion $J(\tau) := \frac{1}{1728} j(\tau)$, die dann in $\mathbb{F} \setminus \{i, \rho\}$ die Werte 0 und 1 nicht annimmt.

3. Die durch j vermittelte konforme Abbildung. Man studiert zunächst die Abbildung j auf dem Rand von $\mathbb{F}$:

Proposition. *Die Modulfunktion j ist auf dem Rand von $\mathbb{F}$ und auf der imaginären Achse, aber in keinem weiteren Punkt von $\mathbb{F}$ reell. Genauer wird abgebildet*
a) *das Geradenstück von ∞ nach ρ auf das Intervall $]\!] -\infty, 0]\!]$,*
b) *der Kreisbogen von ρ nach i auf das Intervall $[\![0, 1728]\!]$,*
c) *das Geradenstück von i nach ∞ auf das Intervall $[\![1728, \infty[\![$.*

Beweis. Da die Fourier–Koeffizienten von j reell sind, folgt zunächst

$$j(-\overline{\tau}) = \overline{j(\tau)} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}.$$

Also ist j auf der imaginären Achse reell. Für $\tau := -\frac{1}{2} + iy$, $y > 0$, gilt weiter

$$\overline{j(\tau)} = j(-\overline{\tau}) = j\left(\tfrac{1}{2} + iy\right) = j\left(-\tfrac{1}{2} + iy\right) = j(\tau).$$

Damit ist j auch auf den beiden Geradenstücken des Randes von $\mathbb{F}$ reell. Für $|\tau| = 1$ gilt $-1/\tau = -\overline{\tau}$, also auch $\overline{j(\tau)} = j(\tau)$. Die fehlenden Aussagen ergeben sich mit Stetigkeitsargumenten bzw. folgen aus der Bijektivität der Abbildung $j : \mathbb{F} \to \mathbb{C}$. □

Erklärt man wie in II.2.5(3) die „linke Hälfte" von $\overline{\mathbb{F}}$ durch

$$\mathbb{L} := \left\{\tau \in \mathbb{H}\,;\ -\tfrac{1}{2} \le \operatorname{Re}\tau \le 0\ ,\ |\tau| \ge 1\right\},$$

so wird also $\mathbb{L}$ durch j bijektiv auf $\overline{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ abgebildet.

4*. Darstellungssatz. *Zu $0 \neq f \in \mathbb{M}_k$, $k \geq 12$ gerade, gibt es $\alpha \in \mathbb{C}$ mit*

(1) $$f = \alpha \cdot G_4^{\operatorname{ord}_\rho f} \cdot G_6^{\operatorname{ord}_i f} \cdot \Delta^{\operatorname{ord}_\infty f + \gamma(f)} \cdot \prod_{w \in \mathbb{F} \setminus \{i,\rho\}} (j - j(w))^{\operatorname{ord}_w f}.$$

Dabei ist

(2) $$\gamma(f) := \sum_{w \in \mathbb{F} \setminus \{i,\rho\}} \operatorname{ord}_w f.$$

Beweis. Weil $\Delta \cdot (j - j(w))$ zu $\mathbb{M}_{12}$ gehört, ist die rechte Seite g von (1) eine ganze Modulform vom Gewicht

$$k' := 4 \cdot \operatorname{ord}_\rho f + 6 \cdot \operatorname{ord}_i f + 12 \cdot (\gamma(f) + \operatorname{ord}_\infty f).$$

Nach der Gewichtsformel ist aber $k' = k$. Wegen Korollar 4.1A und Satz 2A haben f und g überall die gleichen Ordnungen. Der Quotient f/g gehört daher zu $\mathbb{M}_0$, ist also konstant. □

Korollar. *Es gilt*

$$G_4^* \cdot \frac{j'}{j} = -2\pi i \cdot G_6^*\,, \quad j' = -2\pi i \cdot \frac{G_{14}^*}{\Delta^*}.$$

Beweis. Wegen 4.6(2) und 4.6(4) gehört $G_4^* \cdot j'/j$ zu $\mathbb{M}_6$, denn die Nullstelle von G_4^* und j bei $\tau = \rho$ kürzt sich heraus. Dies ergibt die erste Gleichung. Dann setzt man 2.4(1) für j ein und benutzt 4.2(4). □

5*. Der Kleine Satz von Picard kann direkt aus den Abbildungseigenschaften von j gefolgert werden.

Satz. *Ist f eine nicht-konstante ganze Funktion, so nimmt f jeden Wert in $\mathbb{C}$ mit höchstens einer Ausnahme an.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f ganz ist und die Werte a und b, $a \neq b$ nicht annimmt. Dann betrachten wir die ganze Funktion

$$g(z) := 1728 \cdot \frac{f(z) - a}{b - a},$$

die die Werte 0 und 1728 auslässt. Zunächst bestimmt man nach Satz 2A ein $\tau_0 \in \mathbb{F}\backslash\{i, \rho\}$ mit $j(\tau_0) = g(0)$. Es gilt $j'(\tau_0) \neq 0$ wegen Satz 2A. Also gibt es eine in einer Umgebung von 0 holomorphe Funktion φ mit Werten in $\mathbb{H}$, so dass

$$j(\varphi(z)) = g(z) \quad \text{und} \quad \varphi(0) = \tau_0\ .$$

Nun gilt $j'(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) \in g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}\backslash\{0, 1728\}$. Also ist φ längs jeder Kurve in $\mathbb{C}$ analytisch fortsetzbar. Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, existiert nach dem Monodromiesatz (vgl. Hurwitz–Courant [1964], 372) eine ganze Funktion

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{H} \quad \text{mit} \quad \varphi(0) = \tau_0 \quad \text{und} \quad j(\varphi(z)) = g(z) \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Nach dem Satz von Liouville ist $e^{i\varphi(z)}$ und somit auch $\varphi(z)$ konstant. Dann ist aber auch g und somit f konstant. □

Bemerkung. Der Satz wurde 1879 von E. Picard (*Selecta*, 1–21) bewiesen. Unser Beweis folgt Hurwitz–Courant [1964], 438–439. Alternativ vergleiche man R. REMMERT [1995], 10.2.2, wo die Aussage aus dem Satz von BLOCH gefolgert wird.

Aufgaben. 1) Zu jedem $f \in \mathbb{V}_k$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{C}[j]$, so dass $\varphi \cdot f$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.
2) Man gebe eine biholomorphe Abbildung zwischen $\overset{\circ}{\mathbb{F}}$ und $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$ an.
3) $(2\pi i)^2 \cdot G_4^* = \frac{j'^2}{j(j-1728)}$.
4) $(-2\pi i)^3 \cdot G_6^* = \frac{j'^3}{j^2(j-1728)}$.
5) Sei $w \in \mathbb{H}$ mit $G_{12}^*(w) = 0$. Dann gilt $(2\pi i)^6 \cdot G_{12}^* = \frac{j-j(w)}{j^4(j-1728)^3} j'^6$.
6) $(2\pi i)^6 \cdot \Delta^* = \frac{j'^6}{j^4(j-1728)^3}$.
7) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_4^{*3}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ ist vom Betrag 1.
8) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_6^{*2}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ liegt auf der imaginären Achse.
9) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{F}$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so existiert ein auf $\mathbb{H}$ holomorphes $f \in \mathbb{K}$ mit $f(\tau_j) = \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n$.
10) Eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ nimmt jeden Wert mit höchstens 2 Ausnahmen an.
11) Sind f und g ganze Funktionen mit $e^{f(z)} + e^{g(z)} = 1$, so sind f und g konstant.

§6. Die DEDEKINDsche η–Funktion

Die Produktformel der Diskriminante ist die einzige verbleibende Anleihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Im Folgenden wird auch hierfür ein direkter Beweis gegeben. Wegen der prinzipiellen Bedeutung dieser Produktformel gehen wir auch auf andere Beweismöglichkeiten ein.

1. Die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe. Nach dem Vorbild von G. EISENSTEIN (vgl. I.3.7) definiert man die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe

$$G_2(\tau) := \sum_{n \neq 0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \Bigg(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Bigg), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

In Analogie zu Satz I.4.2 (aber im Gegensatz zu 4.3(1)) hat man zunächst die

Proposition. *Die Funktion $G_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \Bigg(1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau} \Bigg).$$

Beweis. Mit der Proposition I.4.2 bekommt man

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= 2\zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \Bigg(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Bigg) \\ &= 2\zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{r \geq 1} r \cdot e^{2\pi i r m \tau}\ . \end{aligned}$$