man R. REMMERT [1995], 10.2.2, wo die Aussage aus dem Satz von BLOCH gefolgert wird.

Aufgaben. 1) Zu jedem $f \in \mathbb{V}_k$ gibt es ein $\varphi \in \mathbb{C}[j]$, so dass $\varphi \cdot f$ holomorph auf $\mathbb{H}$ ist.
2) Man gebe eine biholomorphe Abbildung zwischen $\overset{\circ}{\mathbb{F}}$ und $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \leq 0\}$ an.
3) $(2\pi i)^2 \cdot G_4^* = \frac{j'^2}{j(j-1728)}$.
4) $(-2\pi i)^3 \cdot G_6^* = \frac{j'^3}{j^2(j-1728)}$.
5) Sei $w \in \mathbb{H}$ mit $G_{12}^*(w) = 0$. Dann gilt $(2\pi i)^6 \cdot G_{12}^* = \frac{j-j(w)}{j^4(j-1728)^3} j'^6$.
6) $(2\pi i)^6 \cdot \Delta^* = \frac{j'^6}{j^4(j-1728)^3}$.
7) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_4^{*3}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ ist vom Betrag 1.
8) Es gibt genau ein $\tau \in \mathbb{F}$ mit $G_6^{*2}(\tau) = \Delta^*(\tau)$ und dieses τ liegt auf der imaginären Achse.
9) Sind $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{F}$ paarweise verschieden und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, so existiert ein auf $\mathbb{H}$ holomorphes $f \in \mathbb{K}$ mit $f(\tau_j) = \alpha_j,\ j = 1, \ldots, n$.
10) Eine nicht-konstante meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ nimmt jeden Wert mit höchstens 2 Ausnahmen an.
11) Sind f und g ganze Funktionen mit $e^{f(z)} + e^{g(z)} = 1$, so sind f und g konstant.

§6. Die DEDEKINDsche η–Funktion

Die Produktformel der Diskriminante ist die einzige verbleibende Anleihe aus der Theorie der elliptischen Funktionen. Im Folgenden wird auch hierfür ein direkter Beweis gegeben. Wegen der prinzipiellen Bedeutung dieser Produktformel gehen wir auch auf andere Beweismöglichkeiten ein.

1. Die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe. Nach dem Vorbild von G. EISENSTEIN (vgl. I.3.7) definiert man die bedingt konvergente EISENSTEIN–Reihe

$$G_2(\tau) := \sum_{n \neq 0} n^{-2} + \sum_{m \neq 0} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Big), \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

In Analogie zu Satz I.4.2 (aber im Gegensatz zu 4.3(1)) hat man zunächst die

Proposition. *Die Funktion $G_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist holomorph und für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \Big(1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau} \Big).$$

Beweis. Mit der Proposition I.4.2 bekommt man

$$\begin{aligned} G_2(\tau) &= 2\zeta(2) + 2 \cdot \sum_{m \geq 1} \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-2} \Big) \\ &= 2\zeta(2) - 8\pi^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sum_{r \geq 1} r \cdot e^{2\pi i r m \tau} . \end{aligned}$$

Wegen der absoluten Konvergenz der letzten Reihe darf man hier alle Terme m und r mit $rm = n$ zusammenfassen. Man verwendet noch $\zeta(2) = \pi^2/6$. Offenbar stellt die FOURIER–Reihe eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$ dar. □

Manchmal ist es zweckmäßig, die normierte Version zu betrachten

$$G_2^*(\tau) = \frac{1}{2\zeta(2)} \cdot G_2(\tau) = 1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n\tau}. \tag{2}$$

Die Funktion G_2 ist zwar keine Modulform, wir können aber ihr Transformationsverhalten unter Modulsubstitutionen übersehen. Man hat $G_2(\tau+1) = G_2(\tau)$ und den

Satz. *Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$G_2\left(-1/\tau\right) = \tau^2 \cdot G_2(\tau) - 2\pi i\tau.$$

Beweis. Die Gleichung (1) schreibt man als

$$G_2(\tau) = \frac{\pi^2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right) + 2 \cdot \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \left((m\tau+n)^{-2} + (m\tau-n)^{-2}\right)$$

und bekommt

$$G_2\left(-1/\tau\right) = \frac{\pi^2}{3} \cdot (1+\tau^2) + 2\tau^2 \cdot \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \left((n\tau-m)^{-2} + (n\tau+m)^{-2}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$F(\tau) := \frac{1}{2\tau^2} \cdot \left(\tau^2 G_2(\tau) - G_2\left(-1/\tau\right)\right) = \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} A_{mn} - \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} A_{mn} \tag{$*$}$$

mit

$$A_{mn} := (m\tau+n)^{-2} + (m\tau-n)^{-2}.$$

Die Reihen auf der rechten Seite von $(*)$ sind nicht absolut konvergent, die Summation darf also nicht vertauscht werden. Man geht wie folgt vor: Für

$$\begin{aligned} B_{mn} : &= \frac{1}{m\tau+n-1} - \frac{1}{m\tau+n} + \frac{1}{m\tau-n} - \frac{1}{m\tau-n+1}, \quad m \geq 1 \text{ und } n \geq 1, \\ &= \frac{1}{(m\tau+n)(m\tau+n-1)} + \frac{1}{(m\tau-n)(m\tau-n+1)} \end{aligned}$$

gilt nach Proposition 2.1

$$A_{mn} - B_{mn} = \mathcal{O}\left((m^2+n^2)^{-3/2}\right) = \mathcal{O}\left(m^{-3/2} \cdot n^{-3/2}\right),$$

wenn man $m^2 + n^2 > mn$ beachtet. Wegen der absoluten Konvergenz folgt

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_{mn}-B_{mn})=\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}(A_{mn}-B_{mn}),$$

und $(*)$ ergibt

$$F(\tau)=\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}B_{mn}-\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}B_{mn}. \tag{$**$}$$

Da sich die Terme abwechselnd wegheben, hat man sofort

$$\sum_{n\geq 1}B_{mn}=0.$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned}\tau\cdot\sum_{m\geq 1}B_{mn}&=\sum_{m\geq 1}\left(\frac{1}{m+(n-1)/\tau}-\frac{1}{m+n/\tau}+\frac{1}{m-n/\tau}-\frac{1}{m-(n-1)/\tau}\right)\\&=\sum_{m\geq 1}\left(\frac{2(n-1)/\tau}{[(n-1)/\tau]^2-m^2}-\frac{2n/\tau}{[n/\tau]^2-m^2}\right)=\varphi(n-1)-\varphi(n)\ ,\end{aligned}$$

wobei aufgrund der Partialbruchentwicklung des Cotangens (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 11.2.1)

$$\varphi(\xi):=\begin{cases}\pi\cot(\pi\xi/\tau)-\dfrac{1}{\xi/\tau} & \text{für }\ \xi\neq 0,\\ 0 & \text{für }\ \xi=0\end{cases}$$

gilt. Nach $(**)$ folgt daher

$$\tau\cdot F(\tau)=-\tau\cdot\sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1}B_{mn}=-\sum_{n\geq 1}(\varphi(n-1)-\varphi(n))=-\varphi(0)+\lim_{n\to\infty}\varphi(n).$$

Für $z=x+iy$ gilt

$$\cot z=i\cdot\frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{e^{ix-y}-e^{-ix+y}},\quad\text{also}\quad\lim_{y\to-\infty}\cot z=i.$$

Wegen $\mathrm{Im}\,(1/\tau)<0$ folgt $\tau\cdot F(\tau)=\pi i$, also die Behauptung. □

Bemerkung. Die Idee dieses Beweises findet man bereits bei G. EISENSTEIN (*Math. Werke I*, 357–478); eine präzise Durchführung der Beweisidee gibt wohl erstmals A. HURWITZ in seiner Dissertation (*Math. Werke I*, 23–26). Man vergleiche R. FUETER [1924], 21–23, J.–P. SERRE [1973], 95–96, und N. KOBLITZ [1993], Proposition III.2.7.

2. Das Transformationsverhalten von η. Nach R. DEDEKIND (*Ges. math. Werke I*, 159–173) definiert man eine holomorphe Funktion $\eta:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ durch

$$\eta(\tau):=e^{\pi i\tau/12}\cdot\prod_{m=1}^{\infty}(1-e^{2\pi im\tau}). \tag{1}$$

Diese DEDEKIND*sche η–Funktion* darf nicht mit der in I.6.1(4) eingeführten η–Funktion verwechselt werden! Offenbar gilt

$$\eta(\tau+1) = e^{\pi i/12} \cdot \eta(\tau). \tag{2}$$

Da das Produkt absolut konvergiert, hat man außerdem

$$\eta(\tau) \neq 0 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Satz A. *Es gilt*

$$\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \eta(\tau) \quad \textit{für alle } \ \tau \in \mathbb{H}.$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv wird.

Beweis. Für $\tau \in \mathbb{H}$ betrachte man die Funktion $f(\tau) := \eta'(\tau)/\eta(\tau)$. Aus (1) folgert man direkt

$$\begin{aligned} f(\tau) = \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m \geq 1} m \cdot \frac{e^{2\pi i m\tau}}{1 - e^{2\pi i m \tau}}\right) &= \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{m\geq 1}\sum_{r \geq 1} m \cdot e^{2\pi i r m \tau}\right) \\ = \frac{\pi i}{12} \cdot \left(1 - 24 \cdot \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) \cdot e^{2\pi i n \tau}\right) &= \frac{i}{4\pi} \cdot G_2(\tau)\ , \end{aligned}$$

wenn man Proposition 1 verwendet. Satz 1 übersetzt sich damit in

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{\tau^2} - f(\tau) - \frac{1}{2\tau} = 0. \tag{$*$}$$

Für

$$g(y) := \frac{\eta\left(i/y\right)}{\eta(iy)\sqrt{y}}, \quad y > 0,$$

erhält man dann

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = f\left(\frac{i}{y}\right) \cdot \frac{-i}{y^2} - i \cdot f(iy) - \frac{1}{2y} = 0$$

nach $(*)$. Es gibt also eine Konstante γ mit $\eta(i/y) = \gamma \cdot \sqrt{y} \cdot \eta(iy)$. Für $y = 1$ folgt $\gamma = 1$, also die Behauptung mit dem Identitätssatz. $\square$

Satz B. *Es gilt* $\eta^{24} = \Delta^*$.

Beweis. Mit η ist auch $f := \eta^{24}$ auf $\mathbb{H}$ holomorph. Wegen (1) gilt

$$f(\tau) = e^{2\pi i\tau} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m\tau}\right)^{24} = e^{2\pi i \tau} + \cdots\ , \tag{$*$}$$

so dass f in eine FOURIER–Reihe entwickelbar ist mit $\alpha_f(0) = 0$ und $\alpha_f(1) = 1$. Gleichung (2) und Satz A zeigen, dass

$$(**) \qquad f|_{12}M = f$$

für $M = T$ und $M = J$ erfüllt ist. Da T und J nach Satz II.2.1 die Modulgruppe Γ erzeugen, gilt $(**)$ für alle $M \in \Gamma$. Damit folgt $f \in \mathbb{S}_{12}$, also $f = \Delta^*$ mit Korollar 4.1B. $\square$

Nun ergibt $(*)$ einen neuen Beweis für die Produktentwicklung von $\triangle$.

Korollar. *Es gilt*

$$\Delta^*(\tau) = e^{2\pi i\tau} \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - e^{2\pi i m\tau}\right)^{24} \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{H}.$$

Bemerkungen. a) Ein Vergleich von Satz A mit der Theta–Transformations-Formel in E.3 zeigt, dass für

$$\psi(\tau) := \vartheta(\tau)/\eta(\tau)\ , \qquad \tau \in \mathbb{H},$$

die Transformationsformel $\psi(-1/\tau) = \psi(\tau)$ gilt. Nach (3) ist ψ auf $\mathbb{H}$ holomorph. Da wegen (2) und E.3(2) aber auch $\psi(\tau+2) = e^{\pi i/6} \cdot \psi(\tau)$ gilt, folgt

$$\psi(M\tau) = v(M) \cdot \psi(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma_\vartheta$$

mit einer 12. Einheitswurzel $v(M)$. Zur Definition der Theta–Gruppe Γ_ϑ vergleiche man II.3.4.
b) L. EULER betrachtete das η–Produkt bereits 1747 (*Opera posthuma I*, 76–84) im Zusammenhang mit der *Partitionsfunktion*

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) \cdot x^n.$$

c) Die Produktdarstellung von Δ^* im Korollar geht auf C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 154) zurück.

3. Das allgemeine Transformationsverhalten von η. R. DEDEKIND hat in seinen *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von* RIEMANN bereits das Transformationsverhalten von $\log\eta(\tau)$ unter beliebigen Modulsubstitutionen bestimmt. Man findet eine moderne Darstellung z. B. bei J. LEHNER [1964], 338–344. Eine zentrale Rolle spielt dabei die so genannte DEDEKIND*sche Summe* $s(h,k)$, die für teilerfremde ganze Zahlen h, k mit $k > 0$ definiert ist durch

$$(1) \qquad s(h,k) := \sum_{r=1}^{k-1} \left(\frac{r}{k} - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{rh}{k} - \left[\frac{rh}{k}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

Wir formulieren das allgemeine Transformationsverhalten von η als den

Satz von DEDEKIND. *Für* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ *mit* $c > 0$ *gilt*

$$\eta(M\tau) = v(M) \cdot \sqrt{\tfrac{c\tau+d}{i}} \cdot \eta(\tau) \quad \text{mit} \quad v(M) := e^{\pi i\left(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c) - \frac{1}{4}\right)}.$$

Einen *Beweis* findet man z. B. bei J. Lehner [1964], 338–344, oder T.M. Apostol [1990], Theorem 3.4.

4. Verschiedene Beweise für $\eta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \eta(\tau)$.

a) C.L. Siegel (*Ges. Abhandlungen III*, 188) gab 1954 einen Ein–Seiten–Beweis, der von ihm selbst wesentlich ausführlicher in seinen Vorlesungen *Lectures on advanced analytic number theory* (Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1961) und *Analytische Zahlentheorie II* (Göttingen 1963/64, 11–17) dargestellt wurde. Man vergleiche K. Chandrasekharan [1985], 126–131.
Ein kurzer Beweis, der die Weierstrsssche ζ-Funktion verwendet, stammt von H. Petersson und wurde 2006 von J. Elstrodt (Manuscripta Math. **121**, 457-459) verfeinert.
b) Für $\tau \in \mathbb{H}$ und $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > 0$ ist die Reihe

$$G(\tau; s) := \sum_{m,n}{}' (m\tau + n)^{-2} \cdot |m\tau + n|^{-s}$$

nach dem Konvergenz–Lemma 2.1 absolut konvergent. Die Reihe $G(\tau; s)$ ist sicher nicht holomorph in τ, bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ jedoch für $\mathrm{Re}\, s > 0$ holomorph in s. Wegen der absoluten Konvergenz hat $G(\tau; s)$ dagegen ein übersichtliches Verhalten bei allen Modulsubstitutionen $\tau \mapsto M\tau$, $M \in \Gamma$. Man versucht nun, $G(\tau; s)$ bis $s = 0$ holomorph fortzusetzen:

Satz. a) *Bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ ist $G(\tau; s)$ als ganze Funktion in die s–Ebene fortsetzbar.*
b) *Es gilt*

$$G(\tau; 0) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{\pi}{\mathrm{Im}\, \tau} - 8\pi^2 \cdot \sum_{m \geq 1} \sigma_1(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

c) *Für jedes $M \in \Gamma$ gilt $G(\tau; 0)|_2 M = G(\tau; 0)$.*

Für einen *Beweis* vergleiche man B. Schoeneberg [1974], 63–68, oder T. Miyake [1989], §7.2. Dieses Summationsverfahren wird oft nach E. Hecke benannt, er hat es bereits 1925 benutzt (*Math. Werke*, 412).
Ein Vergleich mit Proposition 1 zeigt, dass $G(\tau; 0) + \pi/\mathrm{Im}\, \tau = G_2(\tau)$ gilt. Teil c) des Satzes entnimmt man jetzt die Aussage von Satz 1, so dass man wie in **2** schließen kann.
c) B. Schoeneberg (Mitt. Math. Ges. Hamburg **9**, Heft 4, 4–11) fand 1968 einen Beweis, der auf der Funktionalgleichung einer einfachen L–Reihe beruht. Man findet dort auch weitere Literatur.
d) Ein weiterer Beweis wird in IV.4.9 gegeben.

5*. Extremale Modulformen. In diesem Abschnitt beschreiben wir diejenige ganze Modulform $f \in \mathbb{M}_k$, die bei ∞ den Wert 1 von möglichst hoher Ordnung annimmt. Diese Modulform wird in Kapitel V verwendet, um extremale Gitter zu charakterisieren. Die Ergebnisse stammen von C.L. Siegel, *Ges. Abhandlungen IV*, 82–97.