Kapitel IV.

Die HECKE–PETERSSON–Theorie

Einleitung

E. HECKE (1887–1947) begann 1937 (*Math. Werke*, 644–707) mit einer systematischen Theorie von gewissen arithmetisch definierten Endomorphismen

$$T_n : \mathbb{M}_k \longrightarrow \mathbb{M}_k \ , \ n \in \mathbb{N},$$

des Vektorraums der ganzen Modulformen vom Gewicht k (vgl. III.1.4). Für eine Primzahl p kann man die Wirkung von T_p auf $f \in \mathbb{M}_k$ leicht angeben (vgl. 1.1(7)):

$$(T_p f)(\tau) := p^{k-1} \cdot f(p\tau) + \frac{1}{p} \cdot \sum_{b=1}^{p} f\left(\frac{a\tau + b}{p}\right).$$

Diese „HECKE–Operatoren" vertauschen paarweise und erzeugen daher eine kommutative Algebra $\mathcal{H}_k$ von Endomorphismen von $\mathbb{M}_k$. Überdies bilden sie den Teilraum $\mathbb{S}_k$ der Spitzenformen in sich ab. Ihre Bedeutung (und die Bedeutung ihrer Verallgemeinerung auf Modulformen zu Untergruppen der Modulgruppe) kann nicht hoch genug eingeschätzt werden: Zum Beispiel ist die Diskriminante Δ eine Eigenfunktion aller T_n, genauer gilt (vgl. Satz 1.4)

$$T_n \Delta = \tau(n) \cdot \Delta \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nachdem H. PETERSSON (1902–1984), ein Schüler von E. HECKE, im Jahre 1939 (Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **49**, 49–75) auf $\mathbb{S}_k$ ein kanonisches Skalarprodukt eingeführt hatte, konnte er direkt beweisen, dass die HECKE–Operatoren T_n bezüglich dieses Skalarproduktes selbstadjungiert sind. Einfache Sätze der Linearen Algebra zeigen dann, dass die Algebra $\mathcal{H}_k$ simultan auf Diagonalform transformiert werden kann. In jedem Vektorraum $\mathbb{M}_k$ gibt es daher eine Basis, die aus simultanen Eigenfunktionen aller T_n, $n \in \mathbb{N}$, besteht.

Die Modulgruppe $SL(2;\mathbb{Z})$ wird wie bisher mit Γ bezeichnet und 2×2 Matrizen werden stets in der Form $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ geschrieben.

§1. HECKE–Operatoren

1. HECKE–Operatoren auf dem Vektorraum $V(\mathbb{H})$. Es bezeichnen $V(\mathbb{H})$ den $\mathbb{C}$–Vektorraum der Funktionen f mit folgenden Eigenschaften:

(MP.1) f ist auf $\mathbb{H}$ meromorph.

(MP.2) f ist periodisch mit der Periode 1.

(MP.3) f hat bei ∞ höchstens einen Pol.

Nach Lemma III.1.2 gibt es dann ein $\gamma > 0$, so dass f durch eine für $\operatorname{Im}\tau > \gamma$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergente FOURIER–Reihe der Form

$$f(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\,, \quad m_0 \in \mathbb{Z}\,, \tag{1}$$

dargestellt werden kann.

Für positive ganze Zahlen a, d und für $f \in V(\mathbb{H})$ wird nun eine meromorphe Funktion $T_{a,d}f$ erklärt durch

$$(T_{a,d}f)(\tau) := \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ d)} f((a\tau + b)/d)\,. \tag{2}$$

Hierbei soll b ein volles Restsystem $(\mathrm{mod}\ d)$ durchlaufen. Da sich die Vertreter zweier vollständiger Restsysteme $(\mathrm{mod}\ d)$ bis auf die Reihenfolge nur um jeweils ganzzahlige Vielfache von d unterscheiden, hängt (2) wegen (MP.2) nicht von der Wahl des Restsystems $(\mathrm{mod}\ d)$ ab. Man kann also die Summe z. B. von 1 bis d laufen lassen. Offenbar ist $T_{a,d}$ linear in f, d. h., es gilt

$$T_{a,d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \cdot T_{a,d}f + \beta \cdot T_{a,d}g \quad \text{für alle } f, g \in V(\mathbb{H}) \text{ und } \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,. \tag{3}$$

Proposition. *Für $f \in V(\mathbb{H})$ gilt $T_{a,d}f \in V(\mathbb{H})$ und die* FOURIER*–Reihe von $T_{a,d}f$ wird gegeben durch*

$$(T_{a,d}f)(\tau) = d \cdot \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) \cdot e^{2\pi i m a\tau}\,. \tag{4}$$

Beweis. Natürlich ist $T_{a,d}f$ meromorph auf $\mathbb{H}$. Man hat nun mit (1)

$$(T_{a,d}f)(\tau) = \sum_{m \geq m_0} \alpha_f(m) \cdot e^{2\pi i m a\tau/d} \cdot \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ d)} e^{2\pi i m b/d}\,.$$

Auf die letzte Summe wendet man die Summenformel für die endliche geometrische Reihe an und bekommt

$$\sum_{b \,(\mathrm{mod}\ d)} \left(e^{2\pi i m/d}\right)^b = \begin{cases} d, & \text{falls } d|m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man trägt dies ein, ersetzt m durch md und bekommt (4). Damit gelten (MP.2) und (MP.3) auch für $T_{a,d}f$. □

Für $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ wird der HECKE–*Operator* $T_n^{(k)}$ auf $V(\mathbb{H})$ definiert durch

$$T_n^{(k)} f := n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n, d>0} d^{-k} \cdot T_{a,d} f \ . \tag{5}$$

Explizit bedeutet dies

$$\left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) = n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n, d>0} d^{-k} \cdot \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ d)} f((a\tau + b)/d) \ . \tag{6}$$

Für eine Primzahl p gilt daher speziell

$$\left(T_p^{(k)} f\right)(\tau) = p^{k-1} \cdot f(p\tau) + \frac{1}{p} \cdot \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ p)} f((\tau + b)/p) \ . \tag{7}$$

Zum Nachweis der Ableitungsgleichung

$$n \left(T_n^{(k)} f\right)' = T_n^{(k+2)} f' \quad \text{für} \quad f \in V(\mathbb{H}) \tag{8}$$

hat man auf der rechten Seite von (6) lediglich $a = n/d$ zu beachten.

Wegen (3) und (4) sind alle $T_n^{(k)}$ Endomorphismen des Vektorraums $V(\mathbb{H})$.

Aus der Proposition erhält man das

Lemma. *Die* FOURIER–*Koeffizienten von $g = T_n^{(k)} f$ werden gegeben durch*

$$\alpha_g(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f\left(mn/d^2\right) \quad \mathit{mit} \quad m \geq \begin{cases} 0, & \mathit{falls}\ \ m_0 = 0, \\ 1, & \mathit{falls}\ \ m_0 > 0, \\ nm_0, & \mathit{falls}\ \ m_0 < 0. \end{cases} \tag{9}$$

Insbesondere gilt

$$\alpha_g(0) = \sigma_{k-1}(n) \cdot \alpha_f(0) \quad \mathit{und} \quad \alpha_g(1) = \alpha_f(n).$$

Hier und im Folgenden wird immer nur über die positiven Teiler d summiert und (m,n) bezeichne stets den größten gemeinsamen Teiler von m und n.

Beweis. Wegen (5) und (4) hat man

$$\begin{aligned} \left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) &= n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n} d^{-k} \cdot (T_{a,d} f)(\tau) \\ &= n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n} d^{1-k} \cdot \sum_{m \geq m_0/d} \alpha_f(md) \cdot e^{2\pi i m a \tau} \ , \\ &= \sum_{ad=n} a^{k-1} \cdot \sum_{m \geq a m_0/n} \alpha_f\left(mn/a\right) \cdot e^{2\pi i m a \tau} \ . \end{aligned}$$

Nun sammelt man die Terme mit $ma = r$ und erhält

$$\left(T_n^{(k)}f\right)(\tau) = \sum_{r,a} a^{k-1} \cdot \alpha_f\left(nr/a^2\right) \cdot e^{2\pi i r\tau} \ ,$$

wobei die Summe über alle ganzen r und a mit

$$a > 0,\ a|n\,,\ a|r \quad \text{und} \quad r \geq a^2 m_0/n$$

zu erstrecken ist. Da a genau die positiven Teiler von (n,r) durchläuft, erhält man (9) unter Beachtung von

$$a^2 m_0/n \geq \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad m_0 = 0, \\ m_0/n > 0, & \text{falls} \quad m_0 > 0, \\ nm_0, & \text{falls} \quad m_0 < 0. \end{cases}$$ □

Den Spezialfall einer Primzahl formulieren wir als

Korollar. *Für eine Primzahl p gilt*

$$\alpha_{T_p^{(k)}f}(m) = \begin{cases} \alpha_f(mp)\ , & \textit{falls}\ \ p \nmid m, \\ \alpha_f(mp) + p^{k-1} \cdot \alpha_f\left(m/p\right)\ , & \textit{falls}\ \ p|\,m. \end{cases}$$

Bemerkung. Anstelle von $T_n^{(k)}f$ wird manchmal auch $f|T_n^{(k)}$ oder $f|_k T_n$ geschrieben.

2. Transformationen n–ter Ordnung. Die ursprüngliche Definition der HECKE–Operatoren T_n basiert auf den ganzzahligen 2×2 Matrizen der Determinante n, den – wie man früher sagte – *Transformationen n–ter Ordnung*:

(1) $$\Gamma_n := \{M \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z})\ ;\ \det M = n\}\ , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Offenbar stimmt $\Gamma_1 = \Gamma$ mit der Modulgruppe überein. Weiter operiert Γ durch Multiplikation von links und von rechts auf Γ_n,

$$\Gamma \cdot \Gamma_n = \Gamma_n = \Gamma_n \cdot \Gamma\ .$$

Eine Teilmenge $\mathcal{V} \subset \Gamma_n$ heißt *Rechtsvertretersystem von* Γ_n *modulo* Γ, wenn gilt:

(RV.1) Zu jedem $M \in \Gamma_n$ gibt es ein $L \in \Gamma$ mit $LM \in \mathcal{V}$.
(RV.2) Sind $M_1, M_2 \in \mathcal{V}$ mit $M_1 = LM_2$ für ein $L \in \Gamma$, dann gilt $L = E$.

Diese Bedingungen sind äquivalent zu

(RV) $$\Gamma_n = \bigcup_{M \in \mathcal{V}} \Gamma M \quad \text{disjunkt.}$$

Analog können Linksvertretersysteme von Γ_n modulo Γ definiert werden.

Nennt man M_1 und M_2 aus Γ_n *äquivalent*, in Zeichen $M_1 \sim M_2$, wenn es $L \in \Gamma$ mit $M_1 = LM_2$ gibt, dann besteht ein jedes Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ also nur aus inäquivalenten Matrizen. Wegen (RV.1) spricht man daher auch von einem *vollständigen System von inäquivalenten Matrizen.*

Rechtsvertretersysteme sind natürlich nicht eindeutig bestimmt. Wenn es auf die Auswahl eines solchen Rechtsvertretersystems nicht ankommt, soll es mit

$$\mathcal{V} = \Gamma : \Gamma_n$$

bezeichnet werden. Im vorliegenden Fall gibt es jedoch ein *Standard–Rechtsvertretersystem*:

Satz. *Die Menge*

$$\text{(2)} \qquad \Gamma : \Gamma_n = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2;\mathbb{Z}) \ ; \ ad = n \, , \ d > 0, \ b \pmod{d} \right\}$$

ist ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ.

Beweis. (RV.1): Sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_n$. Man wählt teilerfremde $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ mit $\gamma a + \delta c = 0$. Dann gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Damit folgt

$$LM = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad L := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma \, .$$

Wegen $\det(LM) = \det M = n$ bekommt man $a'd' = n$. Man darf also $d' > 0$ annehmen, wenn man ggfs. L durch $-L$ ersetzt. Wegen

$$T^m LM = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' + md' \\ 0 & d' \end{pmatrix}$$

kann man b' modulo d' reduzieren. Damit ist $T^m LM$ in (2) enthalten.
(RV.2): Sind M und M' aus (2) und $L \in \Gamma$ mit $M = LM'$ gegeben, also unmissverständlich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} \, , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \, ,$$

dann folgt $\gamma a' = 0$, also $\gamma = 0$ und – da d und d' positiv sind – noch $\alpha = \delta = 1$. Jetzt gilt $a' = a$, $d' = d$ und $b = b' + \beta d$. Da aber b und b' aus einem Vertretersystem $\pmod{d}$ stammen, folgt $b' = b$ und $\beta = 0$, also $L = E$. □

Korollar. *Die Anzahl der Elemente eines jeden Rechtsvertretersystems von Γ_n modulo Γ ist*

$$\sigma_1(n) = \sum_{d|n} d.$$

Beweis. Da sich die Elemente zweier solcher Vertretersysteme bis auf eine Permutation nur um jeweils linksseitige Faktoren aus Γ unterscheiden, haben alle Rechtsvertretersysteme gleich viele Elemente. Die Anzahl von (2) ist aber

$$\sum_{d|n}\left(\sum_{b\,(\mathrm{mod}\ d)} 1\right) = \sum_{d|n} d = \sigma_1(n). \qquad \square$$

Bemerkungen. a) Da Γ von links auf der Menge Γ_n durch Multiplikation operiert, ist der Quotientenraum

$$\Gamma \setminus \Gamma_n := \{\Gamma \cdot M\,;\; M \in \Gamma_n\}\,,\; \Gamma \cdot M := \{LM\,;\; L \in \Gamma\},$$

mit der kanonischen Abbildung

$$\pi : \Gamma_n \longrightarrow \Gamma \setminus \Gamma_n\,, \quad \pi(M) = \Gamma \cdot M,$$

definiert. Nach der Definition eines Rechtsvertretersystems $\mathcal{V}$ von Γ_n modulo Γ ist die Einschränkung $\pi|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \Gamma \setminus \Gamma_n$ eine Bijektion.
b) Ist $\mathcal{V}$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ, so sind

$$\mathcal{V}^t := \{M^t\;;\; M \in \mathcal{V}\}\,, \quad \mathcal{V}^\# = \{M^\#;\, M \in \mathcal{V}\},$$

wobei M^t die Transponierte und $M^\# = (\det M) \cdot M^{-1}$ die Adjungierte von M bezeichnet, offenbar Linksvertretersysteme von Γ_n modulo Γ. Links– und Rechtsvertretersysteme haben also gleich viele Elemente.

3. Hecke–Operatoren für Modulformen. Analog zur Definition von $f|M$ für $M \in SL(2;\mathbb{R})$ in III.1.1 wird nun $f|_k M = f|M$ auch für $M \in GL(2;\mathbb{R})$ mit $\det M > 0$ und eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion f definiert durch

$$(1) \qquad (f|M)(\tau) := (f|_k M)(\tau) := (c\tau + d)^{-k} \cdot f(M\tau)\,.$$

Man verifiziert wieder

$$(2) \qquad (\alpha f + \beta g)|M = \alpha \cdot f|M + \beta \cdot g|M \quad \text{und} \quad (f|M)|N = f|(MN)$$

für $M, N \in GL(2;\mathbb{R})$ mit $\det M > 0$ und $\det N > 0$.

Nach III.1.3 gehören die Modulformen vom Gewicht k zu $V(\mathbb{H})$. In der dortigen Bezeichnung gilt also $\mathbb{V}_k \subset V(\mathbb{H})$.

Satz. *Ist $\Gamma : \Gamma_n$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ und $f \in \mathbb{V}_k$, so gilt*

$$(3) \qquad T_n f := T_n^{(k)} f = n^{k-1} \cdot \sum_{M \in \Gamma : \Gamma_n} f|_k M$$

und $T_n f$ gehört wieder zu $\mathbb{V}_k$.

Man beachte, dass es sich nach Korollar 2 um eine endliche Summe handelt. Auf die Angabe des Gewichts k wird hier meist verzichtet.

Beweis. Man bezeichne die rechte Seite von (3) mit f^*. Da sich die Elemente zweier Rechtsvertretersysteme von Γ_n modulo Γ bis auf die Reihenfolge nur um je einen linksseitigen Faktor L aus Γ unterscheiden, zeigt (M.2) in III.1.1, also $f|L = f$, *dass* f^* *nicht von der Wahl des Vertretersystems* $\Gamma : \Gamma_n$ *abhängt.* Die Verwendung des Symbols $\Gamma : \Gamma_n$ ist also gerechtfertigt. Man darf auf der rechten Seite von (3) daher das Standard–Rechtsvertretersystem aus Satz 2 nehmen. Dann ergibt sich mit Hilfe von 1(6)

$$f^*(\tau) = n^{k-1} \cdot \sum_{ad=n} d^{-k} \cdot \sum_{b \,(\mathrm{mod}\ n)} f((a\tau + b)/d) = \left(T_n^{(k)} f\right)(\tau) \in V(\mathbb{H}).$$

Für festes $N \in \Gamma$ ist mit $\Gamma : \Gamma_n$ auch $\{MN\ ;\ M \in \Gamma : \Gamma_n\}$ ein Rechtsvertretersystem von Γ_n modulo Γ. Wegen (2) folgt daher

$$T_n f = n^{k-1} \cdot \sum_{M \in \Gamma:\Gamma_n} f|_k(MN) = n^{k-1} \cdot \sum_{M \in \Gamma:\Gamma_n} (f|M)|N = (T_n f)|N,$$

so dass $T_n f$ auch modular vom Gewicht k ist. $\square$

Zusammen mit Lemma 1 erhält man das

Korollar. *Alle* HECKE-*Operatoren* $T_n^{(k)} : \mathbb{M}_k \to \mathbb{M}_k,\ n \geq 1,$ *sind Endomorphismen, die Spitzenformen in Spitzenformen abbilden.*

Schließlich notiert man noch die Spezialfälle $m = 0, 1$ von Lemma 1 als

(4) $$\alpha_{T_n f}(0) = \sigma_{k-1}(n) \cdot \alpha_f(0)\ , \quad \alpha_{T_n f}(1) = \alpha_f(n)\ .$$

Bemerkung. Offenbar wird der Satz in völlig analoger Weise bewiesen wie das Lemma III.7.3. In der Tat kann man HECKE–Operatoren mit der Spur für eine geeignete Modulform zur Kongruenzgruppe $\Gamma_0[p]$ definieren (vgl. Aufgabe 2).

4. Simultane Eigenformen. Ein $0 \neq f \in V(\mathbb{H})$ heißt eine *Eigenform bezüglich des* HECKE–*Operators* $T_n^{(k)}$, $n \geq 1$, *zum Eigenwert* $\lambda_f(n) \in \mathbb{C}$, wenn

(1) $$T_n^{(k)} f = \lambda_f(n) \cdot f\ .$$

Ist f eine Eigenform bezüglich aller HECKE–Operatoren $T_n^{(k)}$, $n \geq 1$, so heißt f eine *simultane Eigenform.* Nach Lemma 1 ist $f \neq 0$ genau dann eine simultane Eigenform, wenn seine FOURIER–Koeffizienten die Bedingungen

(2) $$\lambda_f(n) \cdot \alpha_f(m) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} \cdot \alpha_f\left(mn/d^2\right)$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ erfüllen. Setzt man hier speziell $m = 1$, so erhält man

(3) $$\lambda_f(n) \cdot \alpha_f(1) = \alpha_f(n)$$

und es folgt das überraschende