$(x_1, \dots x_k)$ (k beliebig) natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften

$$n = x_1 + x_2 + \cdots x_k, \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_n.$$

Sei A_n die Anzahl aller Partitionen mit geradem k und B_n diejenige mit ungeradem k. (Die Summe $A_n + B_n$ ist also die Summe aller Partitionen.) Man zeige

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(A_n - B_n)q^n.$$

Hieraus und aus der vorhergehenden Aufgabe folgt das berühmte *Euler'sche Pentagonalzahlentheorem* (L. Euler, 1754/55)

$$\begin{aligned} A_n &= B_n && \text{für } n \neq \frac{3m^2+m}{2}, \\ A_n &= B_n + 1 && \text{für } n = \frac{3m^2+m}{2},\ m \text{ gerade}, \\ A_n &= B_n - 1 && \text{für } n = \frac{3m^2+m}{2},\ m \text{ ungerade}. \end{aligned}$$

2. Dirichletreihen

Eine (gewöhnliche) Dirichletreihe ist eine zunächst formale Reihe der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},\ a_n \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C}.$$

Setzt man dabei alle Koeffizienten $a_n = 1$, so erhält man die berühmteste aller Dirichletreihen, die Riemann'sche ζ-Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Wir wissen, dass diese für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert.

2.1 Definition. *Eine Dirichletreihe*

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s},\ a_n \in \mathbb{C},\ s \in \mathbb{C},$$

heißt (irgendwo absolut) ***konvergent****, falls eine komplexe Zahl s_0 existiert, so dass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n n^{-s_0}\right|$$

im üblichen Sinne konvergiert.

Wir folgen der historischen Konvention (RIEMANN, LANDAU) in der Bezeichnung der komplexen Variablen und setzen

$$s = \sigma + \mathrm{i}t, \;\; s_0 = \sigma_0 + \mathrm{i}t_0, \;\; \ldots .$$

Es gilt

$$\left|n^{-s}\right| = \left|e^{-s\log n}\right| = \left|e^{-(\sigma+\mathrm{i}t)\log n}\right| = n^{-\sigma}$$

und

$$n^{-\sigma} \le n^{-\sigma_0} \;\; \text{für} \;\; \sigma \ge \sigma_0.$$

Wenn also die DIRICHLETreihe in s_0 absolut konvergiert, so konvergiert sie in der Halbebene $\sigma \ge \sigma_0$ absolut und gleichmäßig (sogar ihre Betragsreihe).

2.2 Definition. *Eine rechte Halbebene*

$$\{s \in \mathbb{C}; \quad \sigma > \widetilde{\sigma}\}$$

heißt ***Konvergenzhalbebene*** *einer Dirichletreihe, falls die Reihe für alle s aus dieser Halbebene absolut konvergiert. Hierbei ist auch der Fall*

$$\widetilde{\sigma} = -\infty$$

zugelassen. Die Konvergenzhalbebene entartet dann zur vollen komplexen Ebene.

Die Vereinigung aller Konvergenzhalbebenen ist selbst eine Konvergenzhalbebene: $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > \sigma_0\}$. Sie ist die größte aller Konvergenzhalbebenen und wird daher auch *die* Konvergenzhalbebene (genauer die Halbebene der *absoluten Konvergenz*) genannt.

Sei also $\{s \in \mathbb{C};\ \sigma > \sigma_0\}$ die Konvergenzhalbebene. Dann konvergiert $D(s)$ für alle s mit $\sigma > \sigma_0$, aber für kein s mit $\sigma < \sigma_0$ absolut. Über das Verhalten auf der Vertikalgeraden $\sigma = \sigma_0$ kann man ohne weitere Überlegungen nichts sagen. Man nennt σ_0 auch die *Konvergenzabszisse* (genauer die absolute Konvergenzabszisse) von $D(s)$. Natürlich stellt $D(s)$ in ihrer Konvergenzhalbebene eine analytische Funktion dar. Die Konvergenzhalbebene der RIEMANN'schen ζ-Funktion ist

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0 = 1.$$

2.3 Definition. *Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ komplexer Zahlen wächst* ***höchstens polynomial****, falls es Konstanten $C > 0$ und N gibt, so dass*

$$|a_n| \le C\, n^N$$

für alle n gilt.

2.4 Bemerkung. *Die Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ wachse höchstens polynomial. Dann konvergiert die zugehörige Dirichletreihe $D(s)$ (und umgekehrt). Genauer gilt für die Konvergenzabszisse mit den obigen Bezeichnungen $\sigma_0 \le 1 + N$.*

Beispiel. Im Fall der ζ-Funktion kann man $N = 0$ nehmen.

Der *Beweis* ergibt sich aufgrund der Abschätzung

$$\left|a_n n^{-s}\right| \le C\, n^{-(\sigma - N)}$$

unmittelbar aus dem Konvergenzverhalten der RIEMANN'schen ζ-Funktion.

Ähnlich wie im Falle von Potenzreihen sind die Koeffizienten einer DIRICHLETreihe durch die von der Reihe dargestellte Funktion eindeutig bestimmt.

2.5 Eindeutigkeitssatz. *Sei*

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}, \ a_n \in \mathbb{C}, \ s \in \mathbb{C},$$

eine Dirichletreihe, die in einer Konvergenzhalbebene identisch verschwindet. Dann gilt

$$a_n = 0 \quad \textit{für alle} \ \ n.$$

Beweis. Wir schließen indirekt: Sei k der kleinste Index, so dass a_k nicht verschwindet. Es gilt

$$D(s)k^s = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \left(\frac{n}{k}\right)^{-s} = a_k + \cdots$$

und daher

$$\lim_{\sigma \to \infty} D(\sigma)k^{\sigma} = a_k = 0. \qquad \square$$

DIRICHLETreihen können dazu dienen, *multiplikative Eigenschaften* von Zahlenfolgen in funktionentheoretischer Form auszudrücken. Sei

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

eine DIRICHLETreihe. Für irgendeine nichtleere Menge $A \subset \mathbb{N}$ natürlicher Zahlen betrachten wir die Teilreihe

$$D_A(s) = \sum_{n \in A} a_n n^{-s}.$$

2.6 Hilfssatz. *Seien $A, B \subset \mathbb{N}$ zwei nichtleere Mengen natürlicher Zahlen und (a_n) eine Folge komplexer Zahlen. Die folgenden beiden Bedingungen seien erfüllt:*

1) *Die Multiplikationsabbildung*

$$A \times B \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \longmapsto ab,$$

sei injektiv.

Dabei ist $\tau(n)$ die RAMANUJAN'sche τ-Funktion, d. h. $\tau(n)$ ist der n-te FOURIERkoeffizient von $\Delta/(2\pi)^{12}$. Die mit obiger Produktdarstellung äquivalenten Relationen für $\tau(n)$ waren von S. RAMANUJAN (1916) vermutet und von L. J. MORDELL (1917) bewiesen worden.

Die in VII.1 Aufgabe 5 formulierte RAMANUJANvermutung ist übrigens gleichbedeutend mit der Aussage, dass die beiden Nullstellen des Polynoms

$$1 - \tau(p)X + p^{11}X^2$$

konjugiert komplex sind.

10. Sei $f \in [\Gamma, k]_0$ eine Spitzenform, p eine Primzahl und $\widetilde{f} = T(p)f$. Die Funktionen

$$g(z) = |f(z)|\, y^{k/2} \quad \text{und} \quad \widetilde{g}(z) = \left|\widetilde{f}(z)\right| y^{k/2}$$

nehmen Maxima m, $\widetilde{m}$ in $\mathbb{H}$ an (s. Aufgabe 2 in VI.4). Man zeige

$$\widetilde{m} \le p^{\frac{k}{2}-1}(1+p)m.$$

Wir nehmen nun an, dass f eine nicht identisch verschwindende Eigenform von $T(p)$ zum Eigenwert $\lambda(p)$ ist. Man zeige

$$|\lambda(p)| \le p^{\frac{k}{2}-1}(1+p).$$

Ist andererseits $f \in [\Gamma, k]$ eine Nichtspitzenform mit der Eigenschaft $T(p)f = \lambda(p)f$, so folgt aus Aufgabe 5

$$\lambda(p) = 1 + p^{k-1}.$$

Man folgere hieraus (J. ELSTRODT, 1984, vgl. [El]):

Die Eisensteinreihe G_k, $k \ge 4$, $k \equiv 0 \bmod 2$, ist bis auf einen konstanten Faktor die einzige Nichtspitzenform, welche Eigenform wenigstens eines Heckeoperators ist.

3. Dirichletreihen mit Funktionalgleichungen

Wir wollen nun eine Brücke zwischen DIRICHLETreihen mit Funktionalgleichung und Modulformen schlagen. Wir folgen dabei im wesentlichen der von E. HECKE (1936) in seiner klassischen Arbeit „Über die Bestimmung DIRICHLET'scher Reihen durch ihre Funktionalgleichung" (vgl. [He2]) vorgezeichneten Linie.

3.1 Definition. *Sei $R(s)$ eine meromorphe Funktion in der komplexen Ebene. Die Funktion heißt in einem vorgegebenen Vertikalstreifen*

$$a \le \sigma \le b$$

***abklingend**, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C > 0$ mit der Eigenschaft*

$$|R(s)| \le \varepsilon \quad \textit{für} \quad a \le \sigma \le b, \; |t| \ge C,$$

gibt.

Wir sind insbesondere an Funktionen interessiert, welche in jedem Vertikalstreifen abklingen. Die Konstante C darf natürlich von a, b abhängen.

Wir betrachten nun drei Parameter, nämlich zwei positive reelle Zahlen

$$\lambda > 0 \quad \text{und} \quad k > 0,$$

sowie ein Vorzeichen ε,

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Wir ordnen diesen Parametern zwei Räume von Funktionen zu, nämlich

a) einen Raum $\{\lambda, k, \varepsilon\}$ von DIRICHLETreihen,

b) einen Raum $[\lambda, k, \varepsilon]$ von FOURIERreihen.

Beide Räume werden sich als isomorph erweisen.

3.2 Definition. *Der Raum*

$$\{\lambda, k, \varepsilon\} \qquad (\lambda > 0,\ k > 0,\ \varepsilon = \pm 1)$$

bestehe aus der Menge der Dirichletreihen

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Dirichletreihe konvergiert (irgendwo).*

2) *Die durch die Dirichletreihe in ihrer Konvergenzhalbebene dargestellte Funktion ist als meromorphe Funktion in die ganze Ebene fortsetzbar. Sie ist außerhalb von $s = k$ analytisch und hat in $s = k$ höchstens einen Pol erster Ordnung (d. h. eine hebbare Singularität oder einen Pol erster Ordnung).*

3) *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$R(s) = \varepsilon R(k - s) \quad \textit{mit} \quad R(s) := \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) D(s).$$

4) *Die meromorphe Funktion $R(s)$ klingt in jedem Vertikalstreifen ab.*

Anmerkung. Die Funktion

$$s \cdot (s - k) \cdot R(s)$$

ist in der rechten Halbebene $\sigma > 0$ analytisch. Aufgrund der Funktionalgleichung ist sie bis aufs Vorzeichen invariant unter $s \mapsto k - s$. Sie ist daher eine *ganze* Funktion.

Als nächstes definieren wir den korrespondierenden Raum von FOURIERreihen. Es handelt sich um FOURIERreihen der Periode λ.

3.3 Definition. *Der Raum*

$$[\lambda, k, \varepsilon] \qquad (\lambda > 0,\ k > 0,\ \varepsilon = \pm 1)$$

bestehe aus der Menge aller Fourierreihen

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}$$

mit folgenden Eigenschaften:

1) *Die Folge (a_n) wächst höchstens polynomial. Insbesondere konvergiert $f(z)$ in der oberen Halbebene und stellt dort eine analytische Funktion dar.*
2) *Es gilt die Funktionalgleichung*

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \varepsilon \left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k f(z),$$

   wobei $(z/\mathrm{i})^k$ durch den Hauptwert des Logarithmus definiert sei.

3.4 Theorem (E. Hecke, 1936). *Die Zuordnung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}} \longmapsto D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

definiert einen Isomorphismus

$$[\lambda, k, \varepsilon] \xrightarrow{\sim} \{\lambda, k, \varepsilon\}.$$

Das Residuum von D bei $s = k$ ist

$$\operatorname{Res}(D; k) = a_0 \varepsilon \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^k \Gamma(k)^{-1}.$$

Insbesondere ist D genau dann eine ganze Funktion, wenn a_0 verschwindet.

Vorbemerkung zum Beweis. Auf der rechten Seite der Zuordnung gehen nur die Koeffizienten a_n für positive n ein, auf der linken dagegen auch noch a_0. Dies wird insbesondere bei der Konstruktion der Umkehrabbildung zu beachten sein. Jedenfalls ist die Zuordnung injektiv, denn in ihrem Kern liegen nur konstante Funktionen und diese genügen nicht dem Transformationsverhalten.

Beweis des Theorems.

Erster Teil. Sei $f \in [\lambda, k, \varepsilon]$. Um die analytische Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung für $D(s)$ zu beweisen, müssen wir einen funktionentheoretischen Übergang von $f(z)$ zu $D(s)$ schaffen. Dieser wird durch das Γ-Integral

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt \qquad (\operatorname{Re} s > 0)$$

ermöglicht. Ersetzt man die Integrationsvariable

$$t \longmapsto \frac{2\pi n}{\lambda}\, t,$$

so erhält man

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) n^{-s} = \int\limits_0^\infty t^{s-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n}{\lambda} t}\, dt.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit a_n und summiert über n, so erhält man

$$R(s) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{-s} \Gamma(s) D(s) = \sum_{n=1}^\infty a_n \left[\int\limits_0^\infty t^{s-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi n}{\lambda} t}\, dt\right].$$

Diese Entwicklung ist in einer rechten Halbebene gültig (nämlich im Durchschnitt der Konvergenzhalbebene von $D(s)$ mit der Konvergenzhalbebene des Γ-Integrals).

Wir wollen nun Summation und Integration vertauschen. Dazu darf man wegen des polynomialen Folgenwachstums a_n durch eine Potenz n^K ersetzen; außerdem t^{s-1} durch t^{k-1}. Da jetzt alle auftretenden Terme positiv sind, folgt die Behauptung aus dem aus der Lebesgue'schen Integrationstheorie bekannten Satz von B. Levi über die Vertauschbarkeit von Integration und Summation bei monotoner Konvergenz. Will man diesen Satz vermeiden, so muss man eine kleine konkrete Abschätzung vornehmen und das uneigentliche Integral durch ein eigentliches approximieren, um die gewohnte Vertauschung von eigentlichem Integral mit gleichmäßiger Konvergenz anwenden zu können. Wir überlassen diese dem Leser und weisen nur darauf hin, dass eine ähnliche Schwierigkeit bei dem Beweis der Analytizität des Γ-Integrals auftrat.

Nach der Vertauschung von Integration und Summation erhalten wir den angekündigten analytischen Zusammenhang von $f(z)$ und $D(s)$:

$$R(s) = \int\limits_0^\infty t^s [f(\mathrm{i}t) - a_0]\, \frac{dt}{t}\,.$$

Wie bei der Γ-Funktion handelt es sich hier um ein i. a. beidseitig uneigentliches Integral. Wir spalten es daher auf in zwei Teilintegrale

$$R_\infty(s) = \int\limits_1^\infty t^s [f(\mathrm{i}t) - a_0]\, \frac{dt}{t} \quad \text{und} \quad R_0(s) = \int\limits_0^1 t^s [f(\mathrm{i}t) - a_0]\, \frac{dt}{t}\,,$$

so dass also gilt

$$R(s) = R_0(s) + R_\infty(s).$$

Das Integral $R_\infty(s)$ konvergiert in der ganzen Ebene und stellt eine ganze Funktion dar. Dies liegt daran, dass der Ausdruck $f(\mathrm{i}t) - a_0$ für $t \to \infty$ exponentiell abklingt, denn

$$e^{\frac{2\pi t}{\lambda}}[f(\mathrm{i}t) - a_0]$$

bleibt für $t \to \infty$ beschränkt (weil eine Potenzreihe in der Nähe des Nullpunkts beschränkt bleibt).

Etwas schwieriger ist das Verhalten von $f(\mathrm{i}t)$ bei $t \to 0$ zu untersuchen. Hier hilft die Funktionalgleichung für $f(\mathrm{i}t)$,

$$f\left(\frac{\mathrm{i}}{t}\right) = \varepsilon t^k f(\mathrm{i}t),$$

welche die Rollen von ∞ und 0 vertauscht. Es ist daher naheliegend, in dem Integral $R_0(s)$ die Substitution $t \mapsto 1/t$ durchzuführen und dann die Funktionalgleichung einzusetzen. Das Resultat ist

$$R_0(s) = \int_1^\infty t^{-s}[\varepsilon t^k f(\mathrm{i}t) - a_0]\,\frac{dt}{t}\,.$$

Eine kleine Umformung ergibt

$$R_0(s) = \varepsilon \int_1^\infty t^{k-s}[f(\mathrm{i}t) - a_0]\,\frac{dt}{t} + \varepsilon a_0 \int_1^\infty t^{k-s}\,\frac{dt}{t} - a_0 \int_1^\infty t^{-s}\,\frac{dt}{t}\,.$$

Das erste der drei Integrale ist durch R_∞ auszudrücken, die beiden anderen kann man berechnen. Es ergibt sich

$$R_0(s) = \varepsilon R_\infty(k-s) - a_0\left[\frac{\varepsilon}{k-s} + \frac{1}{s}\right]$$

und damit

$$R(s) = R_\infty(s) + \varepsilon R_\infty(k-s) - a_0\left[\frac{\varepsilon}{k-s} + \frac{1}{s}\right].$$

Da $R_\infty(s)$ bereits als ganze Funktion erkannt ist, bedeutet diese Darstellung eine meromorphe Fortsetzung von $R(s)$ (und damit von $D(s)$) in die Ebene. Die Funktionalgleichung für $R(s)$ ist aus dieser Darstellung unmittelbar evident, ebenso die Lage der Pole. Aus der Intergraldarstellung folgt unmittelber die Beschränktheit von $R(s)$ in Vertikalstreifen. Durch partielle Integration ($u(t) = f(\mathrm{i}t - a0)$, $v(t) = t^{s-1}$) zeigt man leicht, dass $R_\infty(s)$ und damit $R(s)$ sogar in jedem Vertikalstreifen abklingt (vgl. auch Hilfssatz 6.10).

Zweiter Teil. Wir müssen die Umkehrabbildung

$$\{\lambda, k, \varepsilon\} \longrightarrow [\lambda, k, \varepsilon]$$

konstruieren. Es liegt nahe, dies durch Umkehrung der Integraldarstellung von $R(s)$ zu bewerkstelligen. Da diese auf dem Γ-Integral beruhte, benötigen wir eine Umkehrformel für das Γ-Integral. Eine solche ist unter dem Namen MELLIN-Integral bekannt, welches wir nun herleiten wollen. Bevor wir dies tun, machen wir noch auf eine asymptotische Eigenschaft von $\Gamma(s)$ bei $\operatorname{Im} s \to \infty$ aufmerksam. Sie ergibt sich aus der STIRLING'schen Formel. Wie wir bereits wissen, ist die Γ-Funktion in endlichen Vertikalstreifen — weg von den Polen — beschränkt. Eine wesentlich schärfere Aussage erhält man aus der STIRLING'schen Formel, in welcher als wesentlicher Term die Funktion

$$s^{s-\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{(s-\frac{1}{2})\operatorname{Log} s} \qquad (\operatorname{Log} s \text{ der Hauptwert})$$

auftritt. Wir wollen diese Funktion in einem Vertikalstreifen $a \leq \sigma \leq b$ weg von den Polen, also unter der zusätzlichen Voraussetzung $|t| \geq 1$ untersuchen. Wegen der Rechenregel $\Gamma(\bar{s}) = \overline{\Gamma(s)}$ genügt es, sich auf die obere Halbebene, genauer also auf $t \geq 1$ zu beschränken. Schreibt man

$$\operatorname{Log} s = \log|s| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} s$$

und benutzt

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{Arg} s = \frac{\pi}{2} \qquad \text{(in dem Vertikalstreifen)},$$

so kann man das asymptotische Verhalten von

$$\left| s^{s-\frac{1}{2}} \right| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re}\left[(s-\frac{1}{2})\operatorname{Log} s\right]}$$

leicht überblicken, denn es gilt

$$\operatorname{Re}\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)\operatorname{Log} s\right] = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\log|s| - t\operatorname{Arg} s.$$

Wir erhalten also, dass die Γ-Funktion in endlichen Vertikalstreifen für $|t| \to \infty$ stark (exponentiell) abklingt. Genauer gilt

3.5 Hilfssatz. *Sei ε eine beliebig kleine positive Zahl, $0 < \varepsilon < \pi/2$. In jedem Vertikalstreifen*

$$a \leq \sigma \leq b; \quad |t| \geq 1,$$

genügt die Γ-Funktion einer Abschätzung

$$|\Gamma(s)| \leq C\mathrm{e}^{-(\pi/2-\varepsilon)|t|}$$

mit einer geeigneten positiven Zahl $C = C(a, b, \varepsilon)$.

Sei nun σ irgendeine reelle Zahl, welche den Polen der Γ-Funktion ausweicht. Wir betrachten das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma + \mathrm{i}t)}{z^{\sigma+\mathrm{i}t}}\, dt.$$

Dabei sei wiederum

$$z^{\sigma+\mathrm{i}t} = \mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{i}t)\,\mathrm{Log}\, z}$$

durch den Hauptwert des Logarithmus definiert. Benutzt man das asymptotische Verhalten der Γ-Funktion auf einem Vertikalstreifen und beachtet dabei

$$\left|z^{\sigma+\mathrm{i}t}\right| = \mathrm{e}^{\sigma \log|z| - t\,\mathrm{Arg}\, z},$$

so folgt die absolute Konvergenz des Integrals unter der Voraussetzung

$$|\mathrm{Arg}\, z| < \frac{\pi}{2}\,,$$

also in der rechten Halbebene $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Wir lassen nun speziell σ die Folge der Zahlen

$$-\frac{1}{2}\,,\ -\frac{3}{2}\,,\ -\frac{5}{2}\,, \dots$$

durchlaufen. Mit Hilfe der Funktionalgleichung und dem daraus resultierenden Abklingverhalten der Funktion $\Gamma(z)$ für $\mathrm{Re}(z) \to -\infty$ schließt man

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - k + \mathrm{i}t)}{z^{\frac{1}{2}-k+\mathrm{i}t}}\, dt = 0.$$

Aus dem Residuensatz folgt nun leicht für $\sigma > 0$

$$\mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma + \mathrm{i}t)}{z^{\sigma+\mathrm{i}t}}\, dt = 2\pi\mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Res}\left(\frac{\Gamma(s)}{z^s}\,;\ s = -n\right) = 2\pi\mathrm{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\,.$$

Insgesamt erhalten wir die Mellin'sche Umkehrformel für das Γ-Integral.

3.6 Hilfssatz (H. Mellin, 1910)**.** *Unter den Voraussetzungen*

$$\sigma > 0 \quad \textit{und} \quad \mathrm{Re}\, z > 0$$

gilt die

Mellin'sche Umkehrformel

$$\mathrm{e}^{-z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\sigma + \mathrm{i}t)}{z^{\sigma+\mathrm{i}t}}\, dt.$$

Mit Hilfe dieser Formel kommen wir nun zu dem angekündigten funktionentheoretischen Übergang von $D(s)$ zu $f(z)$. Wir gehen also von der DIRICHLETreihe $D(s)$ aus und bilden mit einer noch zu bestimmenden Konstanten a_0 die Funktion

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n z}{\lambda}}.$$

Sie konvergiert nach 2.4 in der oberen Halbebene und es gilt

$$f(\mathrm{i}y) - a_0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} n y\right)^s}\, dt$$

mit $s = \sigma + \mathrm{i}t$, $\sigma > 0$. Man zeigt nun leicht mit Hilfe des asymptotischen Verhaltens der Γ-Funktion auf Vertikalgeraden die Vertauschbarkeit von Summation und Integration und erhält unmittelbar die gewünschte Formel

$$f(\mathrm{i}y) - a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(s)}{y^s}\, dt, \quad \sigma > \sigma_0,$$

$$(\sigma_0 = \text{Konvergenzabszisse von } D(s)).$$

Unser Ziel ist es, aus der Funktionalgleichung für $R(s)$ (s. 3.2) die gewünschte Funktionalgleichung für $f(\mathrm{i}y)$ abzuleiten. Nach der Wachstumsvoraussetzung klingt $R(s)$ in jedem Vertikalstreifen der komplexen Ebene ab. Wir können daher die Abszisse σ beliebig verschieben, auch in den negativen Bereich, worauf lediglich beim Überschreiten der Pole $\sigma = 0$ und $\sigma = k$ Residuen aufzunehmen sind. Wir wollen die Abszisse σ nach $k - \sigma$ verschieben. Da wir dabei beide Pole überschreiten, folgt

$$f(\mathrm{i}y) - a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(k-s)}{y^{k-s}}\, dt + \operatorname{Res}\left(\frac{R(s)}{y^s}\,;\, s = 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{R(s)}{y^s}\,;\, s = k\right).$$

Wir verfügen jetzt über die Konstante a_0:

$$a_0 := -\operatorname{Res}\left(\frac{R(s)}{y^s}\,;\, s = 0\right) = -\operatorname{Res}(R(s); s = 0).$$

Benutzt man die Funktionalgleichung $R(k-s) = \varepsilon R(s)$, so ergibt sich nun unmittelbar

$$f\left(\frac{\mathrm{i}}{y}\right) = \varepsilon y^k f(\mathrm{i}y)$$

und durch analytische Fortsetzung

$$f\left(-\frac{1}{z}\right) = \varepsilon\left(\frac{z}{\mathrm{i}}\right)^k f(z). \qquad \square$$

Einige *Beispiele.*

1) Wir untersuchen die Schar

$$\left[2, \frac{1}{2}, 1\right],$$

also Funktionen mit dem Transformationsverhalten

$$f(z+2) = f(z) \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{1}{z}\right) = \sqrt{\frac{z}{\mathrm{i}}}\, f(z).$$

Eine solche Funktion ist $\vartheta(z)$. Wir behaupten

3.7 Satz. *Es gilt:*

$$\left[2, \frac{1}{2}, 1\right] = \mathbb{C} \cdot \vartheta(z).$$

Beweis. Wir benutzen die Resultate über die Bestimmung der Modulformen halbganzen Gewichts zur Thetagruppe (s. VI, Anhang 5), welche ja von

$$z \longmapsto z+2 \quad \text{und} \quad z \longmapsto -\frac{1}{z}$$

erzeugt wird. Der Vektorraum $[\Gamma_\vartheta, 1/2, v_\vartheta]$ ist eindimensional. Dies folgt beispielsweise aus dem allgemeinen Struktursatz VI.6.3. Wir müssen daher nur zeigen, dass jedes Element $f \in [2, 1/2, 1]$ in diesem Vektorraum enthalten, d. h. in allen Spitzen der Thetagruppe*) regulär ist. Dazu steht uns noch die Information zur Verfügung, dass in der FOURIERentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i} n z}$$

die Koeffizienten höchstens polynomial wachsen. In den beiden nächsten Hilfssätzen wird gezeigt, dass sich hieraus die Regularität in allen Spitzen ergibt.

3.8 Hilfssatz. *Die Zuordnung*

$$(a_n)_{n\geq 0} \longmapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi \mathrm{i} n}{\lambda} z}$$

stiftet eine Bijektion zwischen

1) *der Menge aller Folgen* $(a_n)_{n\geq 0}$ *mit höchstens polynomialem Wachstum,*

*) Die Thetagruppe besitzt zwei Spitzenklassen.