

Wegen (**) gilt

$$|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1|, \quad \text{also } |\tau \pm 1| \geq |\tau|$$

und damit $|\operatorname{Re} \tau| \leq 1/2$.

Offenbar gilt $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \operatorname{Per} f$. Sei nun $\omega \in \operatorname{Per} f$. Da ω_1, ω_2 eine \mathbb{R} -Basis von \mathbb{C} ist, gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $\omega = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2$. Nun wählt man $m_j \in \mathbb{Z}$ mit $\beta_j = \alpha_j - m_j, |\beta_j| \leq \frac{1}{2}, j = 1, 2$. Dann gilt

$$\omega' := \omega - m_1\omega_1 - m_2\omega_2 = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \in \operatorname{Per} f.$$

Ist $\beta_1 = 0$, so folgt $\omega' = 0$ bereits aus der Behauptung. Nimmt man $\beta_1 \neq 0$ an, so gilt natürlich $\omega' \in \operatorname{Per} f \setminus \mathbb{Z}\omega_f$ und

$$\begin{aligned} |\omega'|^2 &= |\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2|^2 = (\beta_1^2 \cdot |\tau|^2 + 2\beta_1\beta_2 \cdot \operatorname{Re} \tau + \beta_2^2) \cdot |\omega_2|^2 \\ &\leq (\beta_1^2 + |\beta_1| |\beta_2| + \beta_2^2) \cdot |\tau|^2 \cdot |\omega_2|^2 \leq \frac{3}{4} |\omega_1|^2, \end{aligned}$$

wenn man (iii) berücksichtigt. Das ist ein Widerspruch zu (**). Also folgt $\omega' = 0$ und auch $\operatorname{Per} f = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$, d. h. (III). \square

Es sei V ein reeller Vektorraum der endlichen Dimension $n \geq 1$, also z. B. $V = \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge Ω von V heißt ein *Gitter* in V , wenn es eine \mathbb{R} -Basis $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ von V gibt mit $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 + \dots + \mathbb{Z}\omega_n$. Man nennt dann $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ auch eine *Basis* von Ω . Eine Darstellung eines $\omega \in \Omega$ in der Form

$$\omega = m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + \dots + m_n\omega_n \quad \text{mit } m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$$

nennt man auch eine *Linearkombination von ω durch $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ über \mathbb{Z}* . Offenbar ist mit Ω auch $\lambda\Omega := \{\lambda\omega; \omega \in \Omega\}$ ein Gitter in V , falls $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Im Fall (III) ist die Periodenmenge $\operatorname{Per} f$ also ein Gitter im \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{C} . Im Hinblick auf Lemma 2 und das Fundamental-Lemma vermerken wir noch die

Proposition. *Jedes Gitter Ω in \mathbb{C} ist abgeschlossen und diskret in \mathbb{C} .*

Beweis. Für $\rho > 0$ sei $M = \{\omega \in \Omega; |\omega| \leq \rho\}$. Indem man ggf. ρ durch $\rho/|\omega_2|$ ersetzt, darf man ohne Einschränkung $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}, \tau = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0$, annehmen. Ist $\omega = m\tau + n \in M$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$, so folgt einerseits sogleich

$$\rho^2 \geq |m\tau + n|^2 = (mx + n)^2 + m^2y^2 \geq m^2y^2,$$

also $|m| \leq \rho/y$. Andererseits gilt

$$\rho \geq |mx + n| \geq |n| - |mx|, \quad \text{also } |n| \leq \rho(1 + |x|/y).$$

Daher ist M endlich. \square

Bemerkungen. a) Einen anderen Beweis des Fundamental-Lemmas findet man in dem Buch von HURWITZ–COURANT [1964], II, 1, § 2, aus dem Jahre 1922.
b) Hinter den Fällen (II) und (III) steht der folgende allgemeine

Satz*. Für eine Untergruppe $G \neq \{0\}$ der additiven Gruppen $(\mathbb{R}^n, +)$ sind äquivalent:

- (i) G ist diskret.
- (ii) Es gibt linear unabhängige Vektoren $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq r \leq n$, mit $G = \mathbb{Z}c_1 + \dots + \mathbb{Z}c_r$.

Einen Beweis findet man z. B. bei M. KOECHER [1985], Theorem I.5.5.

c) Mit dem Fundamental-Lemma ist eine notwendige Bedingung an die Periodenmenge $\text{Per } f$ einer nicht-konstanten meromorphen Funktion f hergeleitet. Dabei ist $\text{Per } f = \{0\}$ sicherlich als der „allgemeine Fall“ anzusehen, jedoch ist er im vorliegenden Zusammenhang ohne Interesse. Ist $0 \neq \omega \in \mathbb{C}$, so gibt es sogar eine ganze Funktion f mit $\text{Per } f = \mathbb{Z}\omega$. Man wählt einfach $f(z) = \exp(2\pi iz/\omega)$. Nach R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], Satz 12.3.2, gibt es zu jeder ganzen Funktion f mit $\text{Per } f = \mathbb{Z}\omega$ genau eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion F mit der Eigenschaft

$$f(z) = F(\exp(2\pi iz/\omega)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Bevor in § 3 gezeigt wird, dass es zu jedem Gitter Ω in \mathbb{C} auch meromorphe Funktionen f mit $\Omega = \text{Per } f$ gibt, ist eine Diskussion der fundamentalen Eigenschaften von Gittern in \mathbb{C} sinnvoll. Nach der Beschreibung eines anderen Zugangs in 4 geschieht dies in den Abschnitten 5 bis 7.

4*. JACOBI'S Zugang. Im Jahre 1835 beschäftigte sich C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke II*, 23–50) mit der Frage, wie viele „unabhängige“ Perioden eine nicht-konstante meromorphe Funktion haben kann, und zeigte, dass diese Zahl höchstens zwei ist. Seine Ergebnisse formulieren wir in moderner Sprache als

Lemma von JACOBI. Ist Ω eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{C}, +)$ und sind $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega$ gegeben, dann gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, so dass

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 = 0.$$

Damit sind also je drei Elemente von Ω über \mathbb{Q} linear abhängig. Für einen Beweis benutzt man die so genannte

KRONECKER-Approximation. Zu jeder positiven ganzen Zahl N und allen $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbb{C}$ gibt es $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, nicht alle Null, mit den Eigenschaften:

- (i) $|m_1|, |m_2|, |m_3| \leq N$,
- (ii) $|m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3| < \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}$.

Beweis. Man setzt $M := \max\{|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|\}$ und

$$\langle m, w \rangle := m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3 \quad \text{für } m = (m_1, m_2, m_3), w = (\omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Schließlich wird das achsenparallele Quadrat in \mathbb{C} mit Mittelpunkt 0 und Kantenlänge $2K$ mit $Q(K)$ bezeichnet, also

$$Q(K) := \{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Re} z| \leq K, |\operatorname{Im} z| \leq K\}.$$

Für alle $m = (m_1, m_2, m_3)^t \in \mathbb{Z}^3$ mit

$$(*) \quad 0 \leq m_1, m_2, m_3 \leq N$$

gilt dann $\langle m, w \rangle \in Q(T)$ mit $T := 3MN$. Die Kanten von $Q(T)$ werden nun in t gleiche Teile geteilt. Damit erhält man eine Zerlegung von $Q(T)$ in t^2 Quadrate der Kantenlänge $2T/t$. Die Anzahl der $m \in \mathbb{Z}^3$ mit $(*)$ ist $(N+1)^3$. Nach dem DIRICHLETSchen Schubfachschluss liegen im Fall $(N+1)^3 > t^2$ wenigstens zwei Punkte $\langle m', w \rangle$ und $\langle m'', w \rangle$ in einem Quadrat der Kantenlänge $2T/t$. Damit erhält man durch Differenzbildung ein $0 \neq m \in \mathbb{Z}^3$ mit (i) und

$$(**) \quad \langle m, w \rangle \in Q(2T/t), \quad \text{also} \quad |\langle m, w \rangle| \leq \sqrt{2} \cdot 2T/t.$$

Man wählt nun ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $(N+1)^{3/2} > t \geq (N+1)^{3/2} - 1$. Dann gilt also $(N+1)^3 > t^2$ und $t \geq N^{3/2}$. Aus $(**)$ folgt somit (ii). \square

Zum *Beweis* des Lemmas von JACOBI gibt es nach 1(1) ein $\rho > 0$ mit $|\omega| \geq \rho$ für alle $0 \neq \omega \in \Omega$. Für hinreichend großes N ist daher die linke Seite von (ii) gleich Null. $\square \square$

Aus dem Lemma von JACOBI kann man nun einen neuen Beweis des Fundamental-Lemmas ableiten. Dieser Beweis ist methodisch nicht uninteressant:

Ist Ω eine diskrete Untergruppe von \mathbb{C} und sind $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ linear unabhängig über \mathbb{R} , dann ergibt das Lemma von JACOBI sofort

$$(1) \quad \Omega \subset \mathbb{Q}\omega_1 + \mathbb{Q}\omega_2.$$

Proposition. *Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft*

$$\Omega \subset \frac{1}{N}(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2).$$

Beweis. Andernfalls würde es $\omega \in \Omega$ nach (1) mit beliebig großen Nennern geben, d. h., man hätte

$$0 \neq \omega'_k = \frac{1}{N_k}(r_k\omega_1 + s_k\omega_2) \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N},$$

mit ganzen Zahlen r_k, s_k, N_k , $\operatorname{ggT}(r_k, s_k, N_k) = 1$ und $N_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$. Da man nach Addition geeigneter Punkte aus $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ohne Einschränkung $0 \leq r_k, s_k \leq N_k$, also auch $|\omega'_k| \leq |\omega_1| + |\omega_2|$ für alle $k \in \mathbb{N}$ annehmen darf, würde es eine aus paarweise verschiedenen Gliedern bestehende konvergente Teilfolge von $(\omega'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ geben. Da Ω diskret ist, erhalten wir einen Widerspruch. \square

Bekanntlich (vgl. K. MEYBERG [1980], Satz 5.5.1) ist jede Untergruppe einer endlich erzeugten freien abelschen Gruppe selbst wieder frei. Nach der Proposition ist Ω eine Untergruppe einer *freien* Gruppe, also auch frei. Wegen $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \Omega$ ist Ω notwendig ein Gitter.

5. Die Gruppe $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$. Die Menge

$$\text{Mat}(2; \mathbb{Z}) := \left\{ U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

bildet bekanntlich bei Matrizen-Addition und -Multiplikation einen Ring mit Einselement $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Gruppe der Einheiten des Ringes $\text{Mat}(2; \mathbb{Z})$ heißt *allgemeine lineare Gruppe vom Grad 2 über \mathbb{Z}* und wird mit $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$ bezeichnet:

(1) $\text{GL}(2; \mathbb{Z}) := \{U \in \text{Mat}(2; \mathbb{Z}) ; \text{es gibt } V \in \text{Mat}(2; \mathbb{Z}) \text{ mit } UV = VU = E\}$.

Äquivalenz-Satz. Für $U \in \text{Mat}(2; \mathbb{Z})$ sind äquivalent:

- (i) $U \in \text{GL}(2; \mathbb{Z})$.
- (ii) $\det U = \pm 1$.
- (iii) U ist invertierbar über \mathbb{Q} und $U^{-1} \in \text{Mat}(2; \mathbb{Z})$.
- (iv) Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist bijektiv.
- (v) Die Abbildung $U : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, $x \mapsto Ux$, ist surjektiv.

Beweis. Die Implikationen (iii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) sind offensichtlich.

(v) \Rightarrow (ii): Es gibt also $u, v \in \mathbb{Z}^2$ mit $Uu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Uv = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, d. h. $UV = E$ für $V := (u, v)$. Durch Determinantenbildung folgt $\det U \cdot \det V = 1$, also (ii).

(ii) \Rightarrow (iii): Man verwendet die bekannte Darstellung

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{für } U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad \square$$

Neben der Gruppe $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$ betrachtet man noch den Normalteiler

$$(2) \quad \text{SL}(2; \mathbb{Z}) := \{U \in \text{GL}(2; \mathbb{Z}) ; \det U = 1\}$$

von $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$, die so genannte *spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über \mathbb{Z}* . Wegen

$$\text{GL}(2; \mathbb{Z}) = \text{SL}(2; \mathbb{Z}) \cup \text{SL}(2; \mathbb{Z}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

hat $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ den Index 2 in $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$. Die Gruppen $\text{GL}(2; \mathbb{Z})$ bzw. $\text{SL}(2; \mathbb{Z})$ sind „größer“ als man zunächst denkt: Für $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2; \mathbb{Z})$ folgt zunächst $\pm 1 = \det U = ad - bc$, so dass z. B. c und d teilerfremd sind. Umgekehrt gilt das

Ergänzungs-Lemma. Sind $c, d \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann gibt es eine Matrix

$$U = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z}).$$

Hier ist U bis auf einen linksseitigen Faktor der Form $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Da c, d teilerfremd sind, gibt es $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ad - bc = 1$, d. h., $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gehört zu $\mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$. Ist $V \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$ eine weitere Matrix mit $V = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$, dann folgt

$$VU^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{Z}),$$

also notwendig $VU^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. \square

Bemerkungen. a) Das Beispiel $U = 2E$ zeigt, dass man – im Gegensatz zu der analogen Situation über einem Körper – die Bedingung „ $U : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ ist injektiv“ nicht in den Äquivalenz-Satz aufnehmen kann.

b) Das Ergänzungs-Lemma erlaubt die Konstruktion von zahllosen Beispielen: Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 89 & 144 \\ 144 & 233 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 514 & 229 & 832 & 040 \\ 832 & 040 & 1 & 346 & 269 \end{pmatrix}$$

gehören z. B. zu $\mathrm{SL}(2; \mathbb{Z})$.

c) Die Ergebnisse dieses Abschnitts lassen sich cum grano salis leicht auf $n \times n$ Matrizen übertragen. Man vergleiche V.1.1 oder M. KOECHER [1985], Chap. I, oder M. NEWMAN [1972], Chap. II.

6. Basis-Lemma. Sei Ω ein Gitter in \mathbb{C} und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω . Für $\omega'_1, \omega'_2 \in \mathbb{C}$ gilt dann:

a) Genau dann gehören ω'_1 und ω'_2 zu Ω , wenn es ein $U \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{Z})$ gibt mit

$$(1) \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}.$$

b) Genau dann ist (ω'_1, ω'_2) eine Basis von Ω , wenn die Matrix U in (1) zu $\mathrm{GL}(2; \mathbb{Z})$ gehört.

Beweis. a) Sind ω'_1, ω'_2 beliebige Punkte von Ω , dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit

$$\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2,$$

also

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{Z}).$$

Gilt umgekehrt (*), so gehören ω'_1 und ω'_2 zu Ω .

b) Ist (ω'_1, ω'_2) eine Basis von Ω , dann gibt es auch eine Matrix $V \in \mathrm{Mat}(2; \mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}$. Es folgt

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = VU \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix} = UV \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

Da aber (ω_1, ω_2) und (ω'_1, ω'_2) über \mathbb{R} linear unabhängig sind, hat man $VU = UV = E$, also $U \in GL(2; \mathbb{Z})$ nach 5(1).

Ist $U \in GL(2; \mathbb{Z})$, dann sind (ω'_1, ω'_2) in (*) zunächst linear unabhängig über \mathbb{R} . Für beliebige $\omega''_1, \omega''_2 \in \Omega$ gibt es analog ein $W \in Mat(2; \mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} \omega''_1 \\ \omega''_2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} \omega''_1 \\ \omega''_2 \end{pmatrix} = WU^{-1} \begin{pmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{pmatrix}.$$

Damit sind ω''_1, ω''_2 jeweils Linearkombinationen von ω'_1, ω'_2 über \mathbb{Z} . Also ist ω'_1, ω'_2 eine Basis von Ω . □

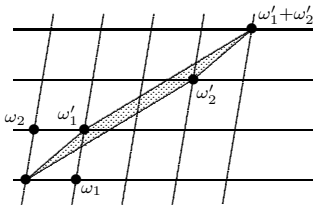


Abb. 4: Grundmaschen

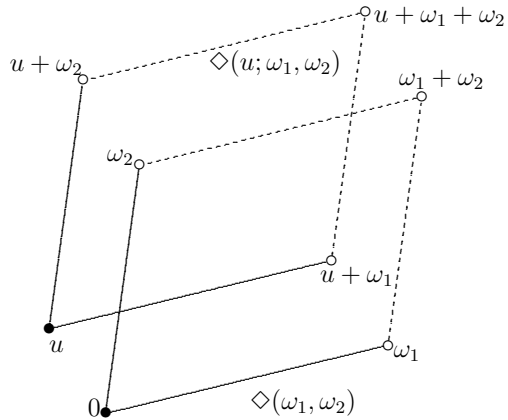


Abb. 5: Periodenparallelogramme

Es sei Ω ein Gitter in \mathbb{C} und (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω . Für $u \in \mathbb{C}$ definiert man das *Periodenparallelogramm* (bezüglich ω_1, ω_2 mit *Basispunkt* u) durch

$$(2) \quad \diamond(u; \omega_1, \omega_2) := \{u + \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 ; 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1\}.$$

Im Fall $u = 0$ schreibt man auch

$$(3) \quad \diamond(\omega_1, \omega_2) := \diamond(0; \omega_1, \omega_2) = \{\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 ; 0 \leq \alpha_1 < 1, 0 \leq \alpha_2 < 1\}$$

und nennt $\diamond(\omega_1, \omega_2)$ auch eine *Grundmasche* des Gitters. Jedes Periodenparallelogramm $P := \diamond(u; \omega_1, \omega_2)$ ist ein *Fundamentbereich* von \mathbb{C} bezüglich Ω im folgenden Sinne:

Proposition A. *Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es genau ein $\omega \in \Omega$ mit $z + \omega \in P$. Gehören insbesondere z und $z + \omega \in \Omega$, zu P , dann gilt $\omega = 0$.*

Beweis. Man wähle $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $z - u = \xi_1\omega_1 + \xi_2\omega_2$ und reduziere ξ_1 und ξ_2 modulo 1. □

Natürlich gibt es zu jedem Gitter viele Periodenparallelogramme, es gilt aber die