PARTITIONEN UND IHRE ERZEUGENDEN FUNKTIONEN ([1], S. 1-8)

In diesem Vortrag sollen Partitionen und ihre erzeugenden Funktionen eingeführt werden. Folgen Sie dazu §1.2-1.3 des Buches *The theory of partitions* von G. Andrews [1].

Zunächst definieren wir den Begriff der Partition.

Definition 1.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ eine positive ganze Zahl. Unter einer *Partition* von n versteht man eine monoton fallende Folge natürlicher Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, so dass $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ gilt. Die Zahlen a_i nennt man die *Summanden* der Partition und k heißt die *Länge* der Partition.

Die Zahl 4 besitzt zum Beispiel folgende mögliche Partitionen:

$$(4), \quad (3,1), \quad (2,2), \quad (2,1,1), \quad (1,1,1,1).$$

Um hervorzuheben, dass man über Partitionen spricht, ist es üblich, statt der Tupelschreibweise die Summanden einer Partition als Summe aufzulisten:

$$4, \quad 3+1, \quad 2+2, \quad 2+1+1, \quad 1+1+1+1.$$

Wir definieren nun die *Partitionsfunktion* $p(n)$ als die Anzahl der Partitionen von n. Wie oben gesehen ist z.B. $p(4) = 5$. Es erweist sich später als praktisch $p(0) := 1$ zu setzen. Man möchte ebenfalls Partitionen zählen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen. Bezeichnet zum Beispiel $\mathcal{O}$ die Menge der Partitionen, deren Summanden alle ungerade sind ($\mathcal{O}$ von engl. odd $\hat{=}$ ungerade), dann ist $p(\mathcal{O}, n)$ die Anzahl der Partitionen von n mit ausschließlich ungeraden Summanden. Diese Partitionen der Zahl 4 sind beispielsweise $1+1+1+1$ und $3+1$, also ist $p(\mathcal{O}, 4) = 2$.

Es gibt verschiedene interessante Fragen über diese und andere Zählfunktionen, z.B. wie schnell sie wachsen, wie man sie möglichst effizient berechnen kann oder ob sie gewisse zahlentheoretische Eigenschaften, wie Kongruenzen, erfüllen. Eines der wichtigsten Hilfsmittel um diese Fragen anzugehen ist das Konzept der *erzeugenden Funktionen*. Allgemein definiert man für eine Folge (reeller oder auch komplexer) Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ihre erzeugende Funktion als die formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$. Formal bedeutet hier, dass man sich nicht um Konvergenzfragen kümmert. Für viele interessante Beispiele konvergiert diese Potenzreihe allerdings und hat dann schöne analytische Eigenschaften.

Im Falle der Partitionen sei $H \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ und es bezeichnen $p(H, n)$ bzw. $p(H(\leq d), n)$ die Anzahl der Partitionen von n, deren Summanden in H liegen bzw. in H liegen und jeweils höchstens d-mal in einer Partition vorkommen. Dann gilt folgender Satz (vgl. Theorem 1.1 in [1])

Satz 1.2. *Seien $H \subset \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Wir schreiben $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(H, n) q^n$ und $f_d(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(H(\leq d), n) q^n$. Dann gilt*

$$f(q) = \prod_{n\in H} \frac{1}{1-q^n} \quad \textit{und} \quad f_d(q) = \prod_{n\in H} \frac{1-q^{(d+1)n}}{1-q^n}.$$

Beweisen Sie diesen Satz, indem Sie die Produkte ausmultiplizieren und die Terme zusammenfassen. Konvergenzfragen dürfen Sie ignorieren.

Ziehen Sie anschließend aus Satz 1.2 die Folgerung, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Partitionen von n in ungerade Summanden gleich der Anzahl der Partitionen in lauter verschiedene Summanden ist. Laut dem Satz gilt für die erzeugenden Funktionen jeweils, dass sie gegeben sind durch die Produkte $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}$ (ungerade Sumanden) bzw. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$ (verschiedene Summanden). Prüfen Sie dann, dass diese Produkte gleich sind. Zeigen Sie allgemeiner, dass Folgendes richtig ist (vgl Corollary 1.3 in [1]).

Folgerung 1.3. *Sei $d \in \mathbb{N}$ und N_d die Menge aller natürlichen Zahlen, die nicht durch d teilbar sind. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$*

$$p(N_{d+1}, n) = p(\mathbb{N}(\leq d), n).$$

Der Beweis läuft genau wie oben skizziert (dort ist $d = 1$). Diese Folgerung ist auch unter dem Namen Satz von Glaisher bekannt (nach James Whitbread Lee Glaisher, 1848-1928).

Ein weiteres Hilfsmittel zum Studium von Partitionen sind sogenannte *Ferrers-Diagramme* (benannt nach dem britischen Mathematiker Norman Macleod Ferrers, 1829-1903). In diesen Diagrammen stellt man eine Partition durch Zeilen von Punkten dar, wobei die Anzahl der Punkte pro Zeile einem Summanden der Partition entspricht. Das Ferrers-Diagramm zur Partition $5 + 2 + 1$ ist z.B.

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & \\ \bullet & & & & \end{array}.$$

Mithilfe von Ferrers-Diagrammen können wir einen neuen Beweis für Folgerung 1.3 für den Fall $d = 1$ angeben. Dazu benötigt man den Begriff der *konjugierten* Partition. Diese erhält man als die Partition, deren Ferrers-Diagramm, gespiegelt an der Hauptdiagonalen, das Ferrers-Diagramm der ursprünglichen Partition ergibt. Wenn man sich die Diagramme als Matrizen vorstellt (mit Nullen aufgefüllt), entspricht dies dem Transponieren der Matrix. Aus der obigen Partition erhält man dann als konjugiertes Ferrers-Diagramm

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \\ \bullet & & \end{array}$$

als konjuguierte Partition also $3 + 2 + 1 + 1 + 1$.

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.