ANWENDUNGEN VON FERRERS-DIAGRAMMEN ([1], S. 10-13 UND S.27-28)

Im vorigen Vortrag haben wir gesehen wie man interessante Aussagen über Partitionen mithilfe von Ferrers-Diagrammen beweisen kann. Dies werden Sie in diesem Vortrag weiterführen und als erste weitere Anwendung einen Satz von Franklin (Fabian Franklin, 1853-1939) beweisen, der bereits von Adrien-Marie Legendre (1752-1833) vermutet worden ist (vgl. Theorem 1.6 in [1]).

Satz 2.1 (Franklin)**.** *Es bezeichne $p_e(\mathcal{D}, n)$ bzw. $p_o(\mathcal{D}, n)$ die Anzahl der Partitionen von n in eine gerade (engl. even) bzw. ungerade (engl. odd) Anzahl verschiedener Summanden. Dann gilt*

$$p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n) = \begin{cases} (-1)^m & \textit{if } n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1), \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Benutzen Sie zum Beweis dieses Satzes die „Beinahe-Bijektion“ zwischen diesen Arten von Partitionen wie sie auf den Seiten 10-11 im Buch von Andrews [1] beschrieben ist. Folgern Sie daraus den Pentagonalzahlen-Satz von Euler (Leonhard Euler, 1707-1783).

Satz 2.2. *Für komplexe Zahlen q mit $|q| < 1$ gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)}.$$

Zum Beweis multipliziert man, wie schon im vorherigen Vortrag, das Produkt auf der linken Seite formal aus und erhält so, dass seine Reihenentwicklung gegeben ist durch

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (p_e(\mathcal{D}, n) - p_o(\mathcal{D}, n)) q^n.$$

Wie zuvor können Sie auch hier Konvergenzfragen außer Acht lassen.

Mit dem Pentagonalzahlen-Satz 2.2 können wir nun eine sehr effiziente Berechnungsweise für $p(n)$ angeben, die ebenfalls auf Euler zurückgeht:

Erinnern Sie daran, dass wir im vorigen Vortrag bewiesen hatten, dass $\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$ gilt. Damit folgt

$$1 = \frac{\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-q^n}}{\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-q^n}} = \left(\sum_{n \geq 0} p(n) q^n \right) \left(1 + \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n-1)} (1 + q^n) \right).$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich folgende Formel für $p(n)$.

Satz 2.3 (Euler). *Für $n > 0$ sei $B := \lfloor \frac{1}{3}(\sqrt{6n} - 1) \rfloor$ ($\lfloor\ \rfloor$ bezeichnet die untere Gauß-Klammer). Dann gilt*

$$p(n) = \sum_{m=1}^{B} (-1)^{m+1} \left[p\left(n - \frac{3m^2 - m}{2}\right) + p\left(n - \frac{3m^2 + m}{2}\right) \right].$$

Diese Rekursion ist eine sehr effiziente Methode, um $p(n)$ auszurechnen, insbesondere dann, wenn man eine Wertetabelle erstellen will.

Ein weiteres Resultat, das sich mit Ferrers-Diagrammen beweisen lässt, ist die folgende erstaunliche Identität (vgl. Formel (2.2.9) auf S. 21 in [1]):

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2 \cdots (1-q^n)^2} = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-1}.$$

Folgen Sie dem kombinatorischen Beweis, der auf den Seiten 27-28 in [1] zu finden ist. Definieren Sie dazu vorher das *Durfee-Quadrat* einer Partition als das größtmögliche Quadrat in der oberen linken Ecke des zugehörigen Ferrers-Diagramms. Z.B. hat folgende Partition ein Durfee-Quadrat der Seitenlänge 3:

$$7 + 5 + 3 + 3 + 3 + 2 = 23$$

$$\lambda = \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ \bullet & \bullet & & & & & \end{array}$$

Analysieren Sie nun die Ferrers-Diagramme wie in [1].

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.