EINFACHE q-HYPERGEOMETRISCHE IDENTITÄTEN ([1], S. 17-20 UND 26-27)

In diesem Vortrag werden Sie Identitäten für Reihen beweisen, die aus so genannten *q-Pochhammer-Symbolen* (nach Leo August Pochhammer, 1841-1920) aufgebaut sind. Für eine natürliche Zahl n definieren wir

$$(a)_n = (a;q)_n := \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - aq^j\right)$$

und vereinbaren zusätzlich $(a)_0 := 1$ und $(a)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$. Beweisen Sie zunächst den folgenden q-Binomialsatz (vgl. [1], Theorem 2.1).

Satz 3.1. *Es gilt die formale Identität*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n t^n}{(q)_n} = \frac{(at)_\infty}{(t)_\infty}.$$

Wie auch in den bisherigen Vorträgen brauchen Sie sich nicht mit Konvergenzfragen zu befassen.

Diese einfache Identität hat viele Konsequenzen. Folgern Sie aus Satz 3.1 als Beispiele die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(q)_n} = (t)_\infty^{-1}, \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q)_n} = (-t)_\infty \tag{3.2}$$

aus Corollary 2.2 in [1], sowie die Transformationsformel von Heine (nach Heinrich Eduard Heine, 1821-1861), vgl. [1], Corollary 2.3.

Satz 3.2 (Heine, 1846)**.** *Es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n t^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(b)_\infty (at)_\infty}{(c)_\infty (t)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c/b)_n (t)_n b^n}{(q)_n (at)_n}.$$

Leiten Sie schließlich aus Satz 3.2 die folgende Summationsformel (vgl. [1], Corollary 2.4) her.

Folgerung 3.3. *Man hat*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n (c/ab)^n}{(q)_n (c)_n} = \frac{(c/a)_\infty (c/b)_\infty}{(c)_\infty (c/ab)_\infty},$$

wobei wir für hier und später vereinbaren, dass $x/yz = x/(yz)$ gelten soll.

Wir kommen nun zu Anwendungen dieser Formeln auf Partitionen. Die folgende Gleichung (siehe (2.2.9) in [1]) hatten wir in etwas anderer Form bereits im letzten Vortrag mithilfe von Durfee-Quadraten bewiesen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n.$$

Geben Sie nun einen neuen Beweis, indem Sie die Parameter in Folgerung 3.3 geeignet wählen.

Beweisen Sie zum Abschluss Ihres Vortrages unter Verwendung von Heines Transformationsformel und Gleichung (3.1) die Identität (vgl. [1], Theorem 2.13)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1} q^{2n+1}}{(tq; q^2)_{n+1}} = tq \sum_{n=0}^{\infty} (-q)_n q^n t^n.$$

Erwähnen Sie auch die kombinatorische Interpretation dieser Identität: Die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n in verschiedene Summanden, wobei der größte Summand gleich einer vorgegeben Zahl k ist, stimmt mit der Anzahl der Partitionen von n in ausschließlich ungerade Summanden, deren größter Summand plus zweimal die Anzahl der Summanden gleich $2k + 1$ ist, überein.

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.