DIE JACOBISCHE TRIPELPRODUKTIDENTITÄT ([1], S. 21-23 UND [2], S. 4-5)

Ziel dieses Vortrages wird es sein, die wichtige *Jacobische Tripelproduktidentität* (nach Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851) zu beweisen. Diese wird dann im folgenden Vortrag dazu verwendet werden Kongruenzen für Partitionsanzahlen zu beweisen. Erinnern Sie an die Definition des Pochhammer-Symbols:

$$(a)_n := (a;q)_n = \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - aq^j\right),$$

sowie an die Konventionen $(a)_0 := 1$ und $(a)_\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$. Im letzten Vortrag hatten wir die folgende Identität bewiesen, die Sie ebenfalls wiederholen sollten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q)_n} = (-t)_\infty.$$

Formulieren und beweisen Sie nun die Tripelproduktidentität (vgl. Theorem 2.8 in [1]). Die Konvergenz der auftretenden Summen und Produkte auf einem geeigneten Gebiet dürfen Sie als gegeben voraussetzen.

Satz 4.1. *Für $z \neq 0$ gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n q^{n^2} = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(-zq;q^2\right)_\infty \left(-z^{-1}q;q^2\right)_\infty.$$

Folgern Sie als Spezialfall die

Folgerung 4.2. *Es gilt*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \frac{(q)_\infty}{(-q)_\infty},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty}.$$

Hiermit können Sie nun auch einen Beweis für den Eulerschen Pentagonalzahlen-Satz angeben, der im zweiten Vortrag mit anderen Mitteln bewiesen wurde. In der Formulierung mit Pochhammer-Symbolen lässt sich der Pentagonalzahlen-Satz so formulieren

$$(q)_\infty = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}.$$

Für den Beweis ersetzen Sie in der Jacobischen Tripelproduktidentität q durch $q^{\frac{3}{2}}$ und erhalten

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} z^n q^{\frac{3n^2}{2}} = \left(q^3;q^3\right)_\infty \left(-zq^{\frac{3}{2}};q^3\right)_\infty \left(-z^{-1}q^{\frac{3}{2}};q^3\right)_\infty.$$

Setzt man nun $z = -q^{\frac{1}{2}}$, so ergibt sich sofort

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = \left(q^3;q^3\right)_\infty \left(q;q^3\right)_\infty \left(q^2;q^3\right)_\infty = (q)_\infty \, .$$

Beweisen Sie schließlich Theorem 2.1 in [2]:

$$(q)_\infty^3 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(2n+1)\,q^{\frac{(n+1)n}{2}} .$$

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976.

[2] D. Jackson *Notes on the Jacobi triple product identity* (notes).