RAMANUJAN-KONGRUENZEN ([1], S. 1-4)

Formulieren Sie zu Beginn Ihres Vortrages die folgenden berühmten Kongruenzen für $p(n)$, die zuerst von Srinivasa Ramanujan (1887-1920) bewiesen wurden.

Satz 5.1 (Ramanujan, 1919)**.** *Für alle $n \geq 0$ gelten die Kongruenzen*

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden dieser Kongruenzen werden Sie in diesem Vortrag beweisen. Erinnern Sie dazu an die beiden Identitäten aus dem letzten Vortrag, die man als Spezialfälle aus der Jacobischen Tripelproduktidentität erhält,

$$(q)_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}, \tag{5.1}$$

$$(q)_\infty^3 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) q^{\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{5.2}$$

Geben Sie zunächst für den Beweis der Ramanujan-Kongruenzen folgende

Definition 5.2. Seien p eine Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ mit $p \nmid a$. Dann heißt a ein *quadratischer Rest* (engl. *quadratic residue*) modulo p, falls ein $x \in \mathbb{Z}$ existiert, so dass $x^2 \equiv a \pmod p$ gilt. Anderenfalls heißt a ein *quadratischer Nichtrest* (engl. *quadratic non-residue*) modulo p.

Beweisen Sie nun das allgemeine Theorem 1 in [1].

Satz 5.3. *Es seien eine Primzahl $p > 3$ sowie ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $0 < a < p$ gegeben, so dass $-a$ ein quadratischer Nichtrest modulo p ist. Weiter sei für jedes $n \in \mathbb{Z}$ $\alpha_n = \alpha_n(X_1, \ldots, X_j)$ ein Polynom in $X_1, ..., X_j$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, wobei die Exponenten der X_i auch negativ sein können (α_n ist ein so genanntes* Laurent-Polynom*). Dann existiert ein $c \in \mathbb{Z}$, so dass der Koeffizient von $X_1^{m_1} \cdots X_j^{m_j} q^{pN}$ in der formalen Potenzreihe*

$$\frac{q^c}{(q)_\infty^{p-3}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n q^{a\frac{n(n-1)}{2} + bn}$$

durch p teilbar ist. Die Zahl c kann man hierbei als die kleinste nicht-negative ganze Zahl wählen, die kongruent zu $8^{-1}(a(2ba^{-1}+1)^2+1) \pmod p$ ist.

Der Bemerkung am Anfang von Section 3 in [1] folgend beweisen Sie nun mithilfe der Identitäten (5.1) und (5.2) die ersten beiden Ramanujan-Kongruenzen. Beachten Sie, dass Gleichung (5.1) für die Kongruenz $\pmod 5$ und Gleichung (5.2) für die Kongruenz $\pmod 7$ benötigt wird.

Literatur

[1] G. Andrews, R. Roy, *Ramanujan's method in q-series congruences*, Electron. J. Combin. 4 (1997), no. 2, Research Paper 2.