ROGERS-RAMANUJAN-IDENTITÄTEN ([1], S. 106-113)

Formulieren Sie zunächst die folgenden Identitäten, die zuerst von Leonard James Rogers (1862-1933) im Jahr 1894 bewiesen und 1913 von Srinivasa Ramanujan (1887-1920) wiederentdeckt wurden.

Satz 6.1. *Folgende Identitäten gelten:*

$$\frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q)_n},$$

$$\frac{1}{(q^2;q^5)_\infty (q^3;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q)_n}.$$

Um diese Identitäten zu beweisen, definieren Sie zunächst die folgenden beiden Funktionen (vgl. (7.2.1) und (7.2.2) in [1]),

$$H_{k,j}(a;x;q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn} q^{kn^2+n-jn} a^n \left(1 - x^j q^{2nj}\right) \left(axq^{n+1}\right)_\infty \left(a^{-1}\right)_n}{(q)_n (xq^n)_\infty},$$

$$J_{k,j}(a;x;q) = H_{k,j}(a;xq;q) - xqaH_{k,j-1}(a;xq;q).$$

Geben Sie auch die folgende Identität (ohne Beweis) an,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{(2k+1)n(n+1)}{2} - jn} \left(1 - q^{(2n+1)j}\right) = \left(q^{2k+1}; q^{2k+1}\right)_\infty \left(q^j; q^{2k+1}\right)_\infty \left(q^{2k+1-j}; q^{2k+1}\right)_\infty.$$

Sie findet sich in Corollary 2.9 in [1] und folgt im Wesentlichen aus der Jacobi-Tripelprodukt-Identität.

Zeigen Sie nun das nachfolgende Lemma (vgl. Lemma 7.3 in [1]), indem Sie in in der Definition von $J_{k,j}$ die Beobachtung (vgl. die Bemerkung nach (7.2.2) in [1])

$$\lim_{a \to 0} a^n \left(a^{-1}\right)_n = (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

benutzen. Wie immer in diesem Seminar können Sie Konvergenzfragen ignorieren.

Lemma 6.2. *Für $0 \le j \le k$ gilt*

$$J_{k,j}(0;1;q) = \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm j \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1 - q^n)^{-1}.$$

Geben Sie weiterhin ohne Beweis Lemma 7.2 aus [1]:

Lemma 6.3. *Es gilt*

$$J_{k,j}(a;x;q) - J_{k,j-1}(a;x;q) = (xq)^{j-1} \left(J_{k,k-j+1}(a;xq;q) - aJ_{k,k-j+2}(a;xq;q)\right).$$

Definieren Sie nun

$$J_{k,j}(0;x;q) = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{k,j}(m,n)x^m q^n$$

und beweisen Sie für die Koeffizienten $c_{k,j}(m,n)$ die Eigenschaften (vgl. (7.3.4), (7.3.5) und (7.3.6) in [1])

$$\begin{aligned}
&c_{k,j}(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n = 0, \\ 0 & \text{falls } m \leq 0 \text{ oder } n \leq 0 \text{ aber } (m,n) \neq 0, \end{cases} \\
&c_{k,0}(m,n) = 0, \\
&c_{k,j}(m,n) - c_{k,j-1}(m,n) = c_{k,k-j+1}(m-j+1, n-m).
\end{aligned}$$

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Funktion $J_{k,j}(0;x;q)$ durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

Satz 6.1 folgt nun als Spezialfall aus dem allgemeineren

Satz 6.4 (Theorem 7.8 in [1]). *Für $k \geq 2$ und $1 \leq j \leq k$ gilt*

$$\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1} \geq 0} \frac{q^{N_1^2+N_2^2+\ldots+N_{k-1}^2+N_j+N_{j+1}+\ldots+N_{k-1}}}{(q)_{n_1}(q)_{n_2}\cdots(q)_{n_{k-1}}} = \prod_{\substack{n=1 \\ n \not\equiv 0, \pm j \pmod{2k+1}}}^{\infty} (1-q^n)^{-1},$$

wobei $N_\ell = n_\ell + n_{\ell+1} + \cdots + n_{k-1}$ sei.

Die Rogers-Ramanujan-Identitäten in Satz 6.1 folgen nun, indem Sie in Satz 6.4 $k = 2$ und $j = 1, 2$ einsetzen, vgl. Corollaries 7.9 und 7.10 in [1].

Literatur

[1] G. Andrews, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Amsterdam, 1976. .