EINE OBERE SCHRANKE FÜR DIE PARTITIONSFUNKTION ([1], S. 316-318)

Eine der Hauptfragen in der analytischen Theorie der Partitionen ist die nach dem ungefähren Wachstum der Partitionsfunktion $p(n)$ für große n. Diese Frage wurde zuerst von Godfrey Harold Hardy (1877-1947) und Srinivasa Ramanujan (1887-1920) im Jahr 1918 beantwortet. Geben Sie ihr Resultat ohne Beweis an.

Satz 7.1 (Hardy-Ramanujan, 1918)**.** *Für $n \to \infty$ gilt*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Erinnern Sie daran, dass per Definition $f(x) \sim g(x)$ gilt, wenn $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ist. Im Jahr 1937 wurde die Methode von Hardy und Ramanujan von Hans Rademacher (1892-1969) verfeinert, was eine exakte Formel für $p(n)$ als unendliche Reihe lieferte. Diese Reihe konvergiert so schnell, dass sie in vielen Computeralgebrasystemen, wie z.B. Maple oder Sage, verwendet wird, um $p(n)$ für große n exakt zu berechnen. Für $n = 1000$ reichen z.B. die ersten 5 Glieder der Reihe, um den exakten Wert für $p(n)$ ermitteln zu können.

Einen Beweis für Satz 7.1 werden wir im nächsten Vortrag sehen. Sie werden in Ihrem Vortrag stattdessen eine obere Schranke für $p(n)$ beweisen, die sich in Theorem 14.5 in [1] findet:

Satz 7.2. *Für alle $n \geq 1$ gilt $p(n) < e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$.*

Verfeinern Sie den Beweis anschließend wie in der Bemerkung auf S. 318 in [1] beschrieben, um die stärkere Abschätzung

$$p(n) < \frac{\pi}{6(n-1)} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$$

für alle $n > 1$ zu zeigen.

Andererseits ist es leicht einzusehen, dass $p(n)$ exponentiell in $\sqrt{n}$ wächst, z.B. schneller als jedes Polynom in n. Beweisen Sie insbesondere, dass $p(n) \geq 2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$. Dazu muss man lediglich bemerken, dass jede Teilmenge $S = \{s_1, \ldots s_k\}$ von $\{1, 2, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ eine Partition von n induziert, nämlich

$$n = s_1 + s_2 + \cdots + s_k + \left(n - \sum_{j=1}^{k} s_j\right).$$

Beispielsweise liefert für $n = 30$ die Teilmenge $S = \{1, 3, 4\}$ die Partition $1 + 3 + 4 + 22$.

Literatur

[1] T. Apostol, Introduction to analytic number theory, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.