DIE INVERSIONSFORMEL DER DEDEKINDSCHEN ETA-FUNKTION ([1], S. 106-113)

In Ihrem Vortrag werden Sie einen Beweis für die Inversionsformel der Dedekindschen Eta-Funktion (nach Richard Dedekind, 1831-1916)

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}(q)_\infty,$$

geben. Hierbei ist $q = e^{2\pi i\tau}$ und τ ein Punkt in der komplexen oberen Halbebene

$$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(\tau) > 0\}.$$

Beachten Sie, dass die Wahl von $\tau \in \mathbb{H}$ impliziert, dass $|q| < 1$ gilt. Benutzen Sie, dass q unter der Abbildung $\tau \mapsto \tau + 1$ invariant ist, um die elementare Formel

$$\eta(\tau + 1) = e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau)$$

zu zeigen.

Schwieriger ist es, folgende Transformationsformel für η zu beweisen.

Satz 8.1. *Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt*

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\eta(\tau).$$

Daraus folgt, dass η eine so genannte Modulform ist, das ist grob gesagt eine Funktion auf der oberen Halbebene, die unter der Translation $\tau \mapsto \tau + 1$ und der Inversion $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$ ein „schönes“ Transformationsverhalten hat.

Um Satz 8.1 zu beweisen, benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Funktionentheorie, den so genannten *Identitätssatz*. Dieser impliziert das folgende

Lemma 8.2. *Die Inversionsformel in Satz 8.1 gilt dann und nur dann, wenn sie auf der positiven imaginären Achse gilt, falls also für alle $y > 0$ die Gleichung*

$$\eta\left(\frac{i}{y}\right) = \sqrt{y}\,\eta(iy)$$

erfüllt ist.

Diese Aussage dürfen Sie ohne weitere Erklärung verwenden.

Folgen Sie nun den Ausführungen in Abschnitt 2 in [1], um Satz 8.1 zu beweisen.

Die Inversionsformel ist ein wesentliches Hilfsmittel in der modernen Partitionstheorie. So kann sie verwendet werden, um die asymptotische Formel für $p(n)$ nach Hardy und Ramanujan zu beweisen, die bereits im vorigen Vortrag erwähnt wurde:

Satz 8.3 (Hardy-Ramanujan, 1918)**.** *Für $n \to \infty$ gilt*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

Für den Beweis dieses Satzes sollen Sie folgendes Resultat, das auf Albert Ingham (1900-1967) zurückgeht, benutzen, brauchen es aber nicht zu beweisen.

Satz 8.4. *Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f(\tau) = q^{n_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

(1) *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $0 < a_n \leq a_{n+1}$.*
(2) *Es gebe $c \in \mathbb{C}$, $d \in \mathbb{R}$ und ein $N > 0$, so dass für $\tau \to 0$ gilt, dass*

$$f(\tau) \sim c(-i\tau)^d e^{\frac{2\pi i N}{\tau}}.$$

Dann gilt für $n \to \infty$, dass

$$a_n \sim \frac{c}{\sqrt{2} N^{\frac{1}{2}\left(d-\frac{1}{2}\right)}} n^{\frac{1}{2}\left(d-\frac{3}{2}\right)} e^{4\pi\sqrt{Nn}}.$$

Leiten Sie nun aus der Inversionsformel in Satz 8.1 her, dass die erzeugende Funktion $P(q) = \frac{q^{\frac{1}{24}}}{\eta(\tau)}$ der Partitionsfunktion $p(n)$ die Asymptotik $P(q) \sim \sqrt{-i\tau} e^{\frac{\pi i}{12\tau}}$ erfüllt. Mit Satz 8.4 können Sie nun direkt Satz 8.3 folgern.

Literatur

[1] B. Rodgers *A new proof of the inversion formula for the Dedekind Eta function*, (unveröffentlicht)