DIE PARITÄT DER PARTITIONSFUNKTION ([1], S. 3-6)

Im 5. Vortrag hatten wir gesehen, dass die Partitionsfunktion die Ramanujan-Kongruenzen modulo 5, 7 und 11 erfüllt. Eine natürliche Frage ist nun, wie das Verhalten von $p(n)$ modulo anderer Primzahlen aussieht, z.B. modulo 2. Hier sieht es ganz anders aus als bei den Ramanujan-Kongruenzen. Man erwartet im Gegenteil, dass das Verhalten von $p(n)$ modulo 2 im Wesentlichen „zufällig" ist. Überraschenderweise ist es sehr schwierig diese Erwartung zu beweisen.

Der folgende erst kürzlich bewiesene Satz gibt eine Teilantwort auf die Frage nach dem Verhalten von $p(n) \pmod 2$.

Satz 9.1 (Radu, 2012)**.** *Es gibt keine ganzen Zahlen $A > B \geq 0$, so dass für alle $n \geq 0$ gilt, dass $p(An + B) \equiv 0 \pmod 2$.*

Dies untermauert die folgende

Vermutung 9.2. *Asymptotisch ist die Hälfte aller Partitionsanzahlen gerade, also*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{n \leq N : p(n) \equiv 0 \pmod 2\}}{N} = \frac{1}{2}.$$

In diesem Vortrag werden Sie einige untere Schranken für die asymptotische Anzahl der geraden Partitionsanzahlen beweisen, die schon sehr dicht an den besten bekannten unteren Schranken liegen. Diese sind im Wesentlichen von der Form

$$\#\{n \leq N : p(n) \equiv j \pmod 2\} \geq C \cdot \sqrt{N}$$

für eine positive Konstante C, d.h. mit Blick auf Vermutung 9.2 können wir nicht einmal zeigen, dass mehr als 0% aller Partitionsanzahlen gerade bzw. ungerade sind!

Sie werden der Methode von Berndt aus [1] folgen, um erste untere Schranken zu zeigen. Definieren Sie hierzu zunächst den Körper mit zwei Elementen $\mathbb{F}_2$ und den Ring $A = \mathbb{F}_2[[X]]$ der formalen Potenzreihen mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in A$ gilt, dass $f(X^2) = f(X)^2$.

Definieren Sie außerdem die Theta-Funktion

$$\theta(a, b) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Die folgende Identität folgt sofort aus der Jacobischen Tripelproduktidentität. Sie können aber im Vortrag auf den Beweis verzichten:

$$\theta(a, b) = (-a; ab)_\infty(-b; ab)_\infty(ab; ab)_\infty.$$

Definieren Sie nun eine verallgemeinerte Partitionsfunktion $p(r, s; n)$ vermöge

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(r, s; n)q^n = \frac{1}{\theta(-q^r, -q^s)},$$

und folgern Sie wie in [1] direkt aus der Darstellung durch die erzeugende Funktion, dass $p(2,1;n) = p(n)$ gilt.

Beweisen Sie nun die folgenden beiden Sätze wie in [1] beschrieben.

Satz 9.3 ([1], Theorem 3.1)**.** *Für jedes feste $c > 2\log 2$ und hinreichend großes $N \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\#\{n \leq N : p(r,s;n) \equiv 1 \pmod 2\} \geq 3N^{\frac{1}{2} - \frac{c}{\log(\log(N))}}.$$

Satz 9.4 ([1], Theorem 3.3)**.** *Sei $t = r + s$. Dann haben wir für jedes fest gewählte $c < \frac{s}{\sqrt{2t}}$ und N hinreichend groß die Abschätzung*

$$\#\{n \leq N : p(r,s;n) \equiv 0 \pmod 2\} \geq c\sqrt{N}.$$

Literatur

[1] B. Berndt, A. Yee, and A. Zaharescu, *On the parity of partition functions*, Int. J. Math. **14**, 437 (2003).