EISENSTEINREIHEN UND EIN ALTERNATIVER BEWEIS DER RAMANUJAN-KONGRUENZEN

Bereits im 6. Vortrag wurden die Ramanujan-Kongruenzen für die Partitionsfunktion behandelt, die 1918 von Srinivasa Ramanujan entdeckt wurden. Wiederholen Sie zu Beginn Ihres Vortrages diese Kongruenzen.

$$\begin{aligned} p(5n+4) &\equiv 0 \pmod 5, \\ p(7n+5) &\equiv 0 \pmod 7, \\ p(11n+6) &\equiv 0 \pmod{11}. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Kongruenzen zu beweisen war das Ziel des 6. Vortrages. Hierfür wurde im Wesentlichen die Jacobi-Tripelproduktidentität verwendet. In Ihrem Vortrag sollen Sie nun einen elementaren Beweis für die dritte Kongruenz präsentieren, der auf Eigenschaften von Eisenstein-Reihen (nach Ferdinand Gotthold Max Eisenstein, 1823-1852) basiert (vgl. [2]). Den Ausführungen in [1, §4] folgend geben Sie zunächst die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften von Eisenstein-Reihen.

Definition 11.1. Die *Bernoulli-Zahlen* B_n, $n \geq 0$, sind definiert über die erzeugende Funktion

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 2\pi.$$

Zur Definition der Eisenstein-Reihen verwenden wir die folgende allgemeinere Funktion, die ebenfalls auf Ramanujan zurückgeht,

$$\Phi_{r,s}(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} k^r n^s q^{kn}, \qquad r, s \in \mathbb{N}_0.$$

Definition 11.2. Für $r \in \mathbb{N}$ definieren wir die Reihe

$$S_r(q) = -\frac{B_{r+1}}{2(r+1)} + \Phi_{0,r}(q) = -\frac{B_{r+1}}{2(r+1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^r q^k}{1 - q^k}.$$

Die *Eisenstein-Reihe* E_{2k} vom *Gewicht* $2k$ ($k \in \mathbb{N}$) ist nun durch folgenden Ausdruck gegeben,

$$E_{2k}(q) = -\frac{4k}{B_{2k}} S_{2k-1}(q) = 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2k-1} q^n}{1 - q^n}.$$

Die wichtigsten Fälle für unsere Zwecke sind die Eisenstein-Reihen vom Gewicht $2, 4$ bzw. 6:

$$P = P(q) = E_2(q) = 1 - 24\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kq^k}{1-q^k} = -24S_1(q),$$

$$Q = Q(q) = E_4(q) = 1 + 240\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3q^k}{1-q^k} = 240S_3(q),$$

$$R = R(q) = E_6(q) = 1 - 504\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5q^k}{1-q^k} = -504S_5(q).$$

Beweisen Sie nun die folgenden Identitäten für die Reihen P, Q und R.

Satz 11.3 (([1], Theorems 4.2.3, 4.2.4, 4.2.7))**.** *Es gilt*

$$\begin{aligned} q\frac{dP}{dq} &= \frac{P^2 - Q}{12}, \\ q\frac{dQ}{dq} &= \frac{PQ - R}{3}, \\ q\frac{dR}{dq} &= \frac{PR - Q^2}{2}, \\ Q^3 - R^2 &= 1728q(q;q)_\infty^{24}, \\ QR &= E_{10}. \end{aligned}$$

Mit den Argumenten aus [2] zeigen Sie nun die Kongruenz $p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}$ für alle $n \geq 0$.

Literatur

[1] B. Berndt, *Number Theory in the Spirit of Ramanujan*, Student Math. Lib. 34, AMS (2006).
[2] Marivani, S., *An Elementary Proof that* $p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}$. Proc. LA/MS MAA, Spring 2012.