DER RANG EINER PARTITION UND DER EULERSCHE PENTAGONALZAHLENSATZ ([1])

In Ihrem Vortrag werden Sie eine Statistik für Partitionen einführen, den so genannten *Rang*, und sie für einen alternativen Beweis des Pentagonalzahlensatzes von Euler aus dem 2. Vortrag verwenden. Ursprünglich wurde der Rang von dem Physiker Freeman Dyson (geb. 1923) eingeführt, um einen kombinatorischen Beweis für die Ramanujan-Kongruenzen modulo 5 und 7 anzugeben.

Definition 12.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und λ eine Partition von n. Dann ist der *Rang* von λ definiert als die Differenz zwischen dem größten Summanden von λ und der Anzahl der Summanden von λ.

So haben beispielsweise die Partitionen 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$ von 4 jeweils die Ränge 3, 1, 0, -1, -3.

Wir bezeichnen die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl n mit Rang m mit $N(m,n)$. Offensichtlich gilt $N(m,n) = 0$ für $|m| \geq n$. Außerdem sieht man leicht, dass das Konjugieren einer Partition genau das Vorzeichen ihres Ranges ändert, so dass wir die Beziehung

$$N(m,n) = N(-m,n)$$

folgern können.

In [1] bemerkte Dyson eine weitere Symmetrieeigenschaft von $N(m,n)$. Um diese zu formulieren brauchen wir noch eine weitere Statistik ähnlich wie den Rang.

Definition 12.2. Es sei $N_0(m,n)$ die Anzahl der Partitionen von n in nicht-negative Summanden (d.h. 0 ist als Summand zugelassen) mit Rang m.

Offenbar verringert jeder 0-Summand in einer Partition den Rang um 1, lässt aber die Summe gleich, so dass wir die folgende Gleichung für alle $n \geq 1$ erhalten,

$$N_0(m,n) - N_0(m+1,n) = N(m,n). \tag{12.1}$$

Außerdem hat man für alle $m \in \mathbb{Z}$ dass

$$N(m,0) = 0.$$

Zeigen Sie nun durch das kombinatorische Argument in [1] die Symmetrierelation

$$N_0(m,n) = N_0(-m-2, n-m-1). \tag{12.2}$$

Beweisen Sie unter Verwendung von (12.1) und (12.2), sowie den Iterationen aus [1] die Beziehung

$$N_0(m,n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p\left(n - km - \frac{1}{2}k(3k-1)\right). \tag{12.3}$$

Wir betrachten nun die folgenden erzeugenden Funktionen,

$$P(q) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n,$$

$$Q_m(q) = \sum_{n=0}^{\infty} N_0(m,n) q^n.$$

Folgern Sie nun aus (12.3) wie in [1] beschrieben für $m \geq 0$ die Identität

$$Q_m(q) = P(q) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} q^{km + \frac{1}{2}k(3k-1)},$$

sowie, falls $n = 3r + 1$ und $m = 3r$

$$Q_m(q) = P(q) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-km + \frac{k(3k+1)}{2}} - (-1)^r q^{-\frac{m(m-1)}{6}}.$$

Beweisen Sie nun zum Schluss den Eulerschen Pentagonalzahlensatz

$$\frac{1}{P(q)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k q^{\frac{k(3k-1)}{2}},$$

indem Sie in obiger Gleichung $m = r = 0$ einsetzen.

Literatur

[1] F. Dyson, *A New Symmetry of Partitions*, J. Comb. theory, vol 7 (1969), pp 56-61.