# EIN KOMBINATORISCHER BEWEIS DES SATZES VON SCHUR ([1], SEITEN 1-2)

Wir beginnen mit dem folgenden Satz, der zuerst im Jahr 1926 Issai Schur (1875-1941) bewiesen wurde.

**Satz 13.1** (Schur, 1926)**.** *Für jede gegebene natürliche Zahl $n$ ist die Anzahl ihrer Partitionen in Summanden kongruent zu* $\pm 1 \pmod 6$ *gleich der Anzahl der Partitionen von $n$ in Summanden mit minimalem Abstand mindestens* 3 *und Abstand mindestens* 6 *zwischen durch* 3 *teilbaren Summanden.*

Bezeichne allgemeiner für natürliche Zahlen $r$ und $m$ mit $r < \frac{m}{2}$ die Größe $C_{r,m}(n)$ die Anzahl der Partitionen von $n$ in verschiedene Summanden kongruent zu $\pm r \pmod m$, und sei $D_{r,m}(n)$ die Anzahl der Partitionen von $n$ in verschiedene Summanden kongruent zu 0 oder $\pm r \pmod m$ mit minimalem Abstand mindestens $m$ und minimalem Abstand mindestens $2m$ zwischen Vielfachen von $m$. Ziel Ihres Vortrages ist es, den folgenden Satz zu beweisen.

**Satz 13.2** (Verallgemeinerter Satz von Schur)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $C_{r,m}(n) = D_{r,m}(n)$.*

Beachten Sie, dass Satz 13.1 der Spezialfall $r = 1, m = 3$ ist (das ist nicht unmittelbar klar, ein Beweis ist nicht erforderlich). In Ihrem Vortrag sollen Sie einen direkten kombinatorischen Beweis für Satz 13.2 geben, der erklärt, warum die Behauptung richtig ist. Folgen Sie dabei dem Vorgehen in [1].

**Definition 13.3.** Seien $r, m, n, k$ natürliche Zahlen, so dass $r < \frac{m}{2}$ und $n - mk\frac{k-1}{2} \geq rk$ gilt. Unter einer $(r, m)$ *unterliegenden Partition* von $n$ und $k$ ist eine Partition von $n - mk\frac{k-1}{2}$ in genau $k$ Teile, so dass jeder der Summanden kongruent zu 0 oder $\pm 1 \pmod m$ ist, wobei die Vielfachen von $m$ nicht doppelt vorkommen dürfen.

Zum Beispiel ist $4 + 6 + 6 + 11 + 20 + 40 + 45$ eine $(1, 5)$ unterliegende Partition von 237 und 7. Beweisen Sie nun das folgende

**Lemma 13.4.** *Es gibt eine Bijektion zwischen den $(r, m)$ unterliegenden Partitionen für $n$ und $k$ und den Partitionen, die von $D_{r,m}(n)$ gezählt werden und aus genau $k$ Summanden bestehen.*

Geben Sie nun folgende

**Definition 13.5.** Eine Ordnung der Summanden einer $(r, m)$ unterliegenden Partition von $n$ und $k$, sagen wir $(a_1, \ldots, a_k)$, heißt eine $\Omega$*-Ordnung* falls die folgenden Ungleichungen für alle $i, j$ mit $1 \leq i < j \leq k$ erfüllt sind:

(1) Für $a_i \equiv a_j \equiv 0 \pmod m$ gilt $a_i < a_j$,
(2) für $a_i \equiv \pm a_j \equiv \pm r \pmod m$ gilt $a_i \leq a_j$,
(3) für $a_i \equiv \pm r \pmod m$ und $a_j \equiv 0 \pmod m$ gilt $a_i + mi \leq \left\lfloor \frac{a_j + mi}{2} \right\rfloor_r$,
(4) für $a_i \equiv 0 \pmod m$ und $a_j \equiv \pm r \pmod m$ gilt $\left\lfloor \frac{a_i + mi}{2} \right\rfloor_r < a_j + mi$.

Hier bezeichnet $\lfloor x \rfloor_r$ die größte ganze Zahl $N \leq x$ mit $N \equiv \pm r \pmod{m}$.

Zeigen Sie nun das folgende

**Lemma 13.6.** *Jede $(r, m)$ unterliegende Partition besitzt eine eindeutige $\Omega$-Ordnung.*

Geben Sie schließlich die folgende Definition.

**Definition 13.7.** Sei $a_1 + a_2 + ... + a_p$ mit $a_1 < a_2 < ... < a_p$, die von $C_{r,m}(n)$ gezählt wird. Wir unterteilen sie von links nach rechts in *Blöcke* von höchstens 2 Teilen, so dass, falls $a_j + m > a_{j+1}$ sowie eine der folgenden Bedingungen gilt

(1) $j = 1$,
(2) $a_j \geq a_{j-1} + m$,
(3) $a_{j-2}$ und $a_{j-1}$ sind in einem Block,

dann sind $a_j$ und $a_{j+1}$ in einem Block. Anderenfalls ist $a_j$ ein eigener Block. Die Anzahl der Blöcke nennen wir die *Ordnung* der Partition.

Geben Sie nach der Definition folgendes Beispiel: Die Partition $4 + 11 + 14 + 16 + 21 + 29 + 31 + 35 + 36 + 41$, die von $C_{1,5}(237)$ gezählt wird, hat nach der obigen Definition die folgenden Blöcke,

$$4|11, 14|16|29, 31|34, 36|41,$$

demnach also Ordnung 7.

Vervollständigen Sie zum Abschluss den Beweis von Satz 13.2 mithilfe des folgenden Lemmas.

**Lemma 13.8.** *Es gibt eine Bijektion zwischen den $(r, m)$ unterliegenden Partitionen für $n$ und $k$ und den Partitionen mit Ordnung $k$, die von $C_{r,m}(n)$ gezählt werden.*

## Literatur

[1] D. Bressoud, *A combinatorial proof of Schur's 1926 partition theorem*, Proc. of the Amer. Math. Soc., **79**, No. 2, 1980.