MODULFORMEN ([1], S. 37–41, 109–111, 149–164)

Dieser Vortrag stellt die notwendigen Grundlagen über Modulformen zur Verfügung. Zunächst sollen Sie Modulformen ganzzahligen Gewichts definieren. Hierzu benötigen wir die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$, die Operation von Möbiustransformationen und den Strichoperator $|_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Erklären Sie, warum für den Strichoperator gilt:

$$(f|_k M_1)\,|_k M_2 = f|_k\,(M_1 M_2)\,.$$

Hierin seien $M_1,\ M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) | a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1\}$. Zeigen Sie als nächstes, warum es außer der Nullfunktion keine Modulformen von ungeradem Gewicht gibt.

Definieren Sie dann meromorphe Modulformen, erinnern Sie dabei auch an die Definition von Laurent- und Fourier-Reihen. Erläutern Sie die Bedingungen für holomorphe Modulformen und Spitzenformen. Zeigen Sie, dass es keine (holomorphen) Modulformen von negativem Gewicht gibt.

Geben Sie als nächstes Beispiele von Modulformen. Definieren Sie hierzu die Eisenstein-Reihen sowie die Diskriminantenfunktion. Eisenstein-Reihen spielen eine besondere Rolle, da sie den Ring der Modulformen erzeugen und ferner zu elliptischen Kurven in Beziehung stehen.

Definieren Sie die Eisenstein-Reihe G_k und zeigen Sie, dass diese eine Modulform vom Gewicht k ist. In Ihrem Vortrag sollen Sie beweisen:

(1) Jede Modulform vom Gewicht k kann als Linearkombination von G_k und einer Spitzenform geschrieben werden.

(2) Die Fourierkoeffizienten a_n einer holomorphen Modulform erfüllen die folgende asymptotische Beziehung

$$a_n = -a_0 \frac{2k}{B_k} \sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right).$$

Hierin ist $\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r$ die r-te Teiler-Potenzsumme von n und B_k die k-te Bernoullische Zahl, definiert durch die erzeugenden Funktion

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}.$$

(3) Es gilt falls $4 \nmid k$

$$G_k(i) = 0$$

und falls $6 \nmid k$

$$G_k(\rho) = 0,$$

worin $\rho = e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Auch die Δ-Funktion spielt eine große Rolle u. A. wegen ihrer Beziehung zu elliptischen Kurven und Gittern (d.h. $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}\omega \subset \mathbb{C}$ für feste $\tau, \omega \in \mathbb{C}$ mit $\omega \notin \mathbb{R}\tau$). Zeigen Sie, dass Δ eine Spitzenform ist.

Literatur

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.