DIE THETA-FUNKTION UND DIE FUNKTIONALGLEICHUNG DER RIEMANNSCHEN ζ-FUNKTION ([1], S. 30–33, [2], S. 150–151, [3], S. 9–11)

Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ definieren wir die *Riemannsche ζ-Funktion* durch die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}.$$

Die ζ-Funktion besitzt eine Integraldarstellung mittels der sie meromorph auf die ganze komplexe Zahlenebene $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Ziel Ihres Vortrages ist es, mittels einer gewissen Modulform die Funktionalgleichung herzuleiten, die $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ zueinander in Beziehung setzt. Hierzu benötigen wir die sogenannte *Γ-Funktion.* Diese definieren wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ durch

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Da $\Gamma(s)$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ mit einfachen Polstellen bei $s \in -\mathbb{N}_0$ besitzt, liefert die Integral-Darstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

eine meromorphe Fortsetzung von $\zeta(s)$ auf ganz $\mathbb{C}$. Sie können folgenden Satz ohne Beweis verwenden.

Satz 1. *Die ζ-Funktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$. Diese ist holomorph für $s \neq 1$ und hat bei $s = 1$ eine einfache Polstelle mit Residuum 1.*

In Ihrem Vortrag sollen Sie zeigen, dass die Funktion

$$\Lambda(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

für $s \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung

$$\Lambda(s) = \Lambda(1-s) \tag{1}$$

erfüllt. Verwenden Sie hierzu die Transformationseigenschaft der *Jacobischen Theta-Funktion* ($\tau \in \mathbb{H}$)

$$\Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i n^2 \tau}.$$

Zeigen Sie zunächst

$$\Theta\left(-\frac{1}{2\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, \Theta\left(\frac{\tau}{2}\right). \tag{2}$$

Da außerdem auch $\Theta(\tau + 1) = \Theta(\tau)$ gilt, ist Θ eine Modulform (in einem weiteren Sinn als im ersten Vortrag). Leiten Sie anschließend die Integral-Darstellung

$$\Lambda(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\Theta\left(\frac{it}{2}\right) - 1\right) t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

für Λ her. Spalten Sie nun dieses Integral gemäß $0 \leq t \leq 1$ und $t > 1$ auf und verwenden Sie im ersten Integral die Transformationseigenschaft (2), um den Beweis von (1) abzuschließen.

Literatur

[1] R. Bellman, A brief introduction to theta functions, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1–78.
[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.
[3] D. Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper: eine Einführung in die höhere Zahlentheorie, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1–149.