

**UNÄRE THETA-REIHEN** ([1], S. 58–59, [2], S. 348–349, [3], S. 50–51, [4], S. 10–12)

Es seien  $m > 0$  und  $\ell$  ganze Zahlen. Wir definieren die *Jacobischen Theta-Reihen* ( $z \in \mathbb{C}$ ,  $\tau \in \mathbb{H}$ )

$$\vartheta_{m,\ell}(\tau, z) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \ell \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i r z}.$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie die Transformationseigenschaften von  $\vartheta_{m,\ell}$  behandeln. Die Jacobischen Theta-Reihen sind Beispiele von sogenannten *Jacobiformen*. Zeigen Sie (s. Anhang):

$$\begin{aligned} \vartheta_{m,\ell}(\tau + 1, z) &= e^{\frac{\pi i \ell^2}{2m}} \vartheta_{m,\ell}(\tau, z), \\ \vartheta_{m,\ell}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) &= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{r \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell r}{m}} \vartheta_{m,r}(\tau, z). \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\vartheta_{m,\ell}$  liefern auch Beispiele von sogenannten *unären Theta-Reihen*, die eine bedeutende Rolle in der Theorie der Modulformen spielen. Definieren Sie unäre Theta-Reihen (s. [4], S. 10-12). Führen Sie hierzu zunächst *gerade* und *ungerade Dirichlet-Charaktere*  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  modulo  $N \in \mathbb{N}$  ein.

Zu einem Dirichlet-Charakter  $\chi$  definieren wir nun

$$\theta_\chi(\tau) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{2\pi i n^2 \tau} & \text{falls } \chi \text{ gerade ist,} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) n e^{2\pi i n^2 \tau} & \text{falls } \chi \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Definieren Sie auch das *Jacobisymbol*  $\left(\frac{c}{d}\right)$  (s. [3], S. 51 und [4], S. 11) und

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \text{if } d \equiv 1 \pmod{4}, \\ i & \text{if } d \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Geben Sie schließlich ohne Beweis die folgenden Transformationsgesetze von  $\theta_\chi$  an.

**Proposition 1.**

- (1) *Es sei  $\chi$  ein gerader Dirichlet-Charakter modulo  $N$  und  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $4N^2 \mid c$ . Dann gilt:*

$$\theta_\chi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} (c\tau + d)^{\frac{1}{2}} \chi(d) \theta_\chi(\tau).$$

- (2) *Es sei  $\chi$  ein ungerader Dirichlet-Charakter modulo  $N$  und  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  mit  $4N^2 \mid c$ . Dann gilt:*

$$\theta_\chi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{-4c}{d}\right) \varepsilon_d^{-3} (c\tau + d)^{\frac{3}{2}} \chi(d) \theta_\chi(\tau).$$

## Beweis der Transformationseigenschaft der Theta-Reihen

Wir wollen folgende Transformationseigenschaft der *Jacobischen Theta-Reihen*

$$\vartheta_{m,\ell}(\tau, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i(\ell+2mk)^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i(\ell+2mk)z}$$

beweisen:

$$\vartheta_{m,\ell} \left( -\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau} \right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell \nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z).$$

Hierzu betrachten wir den Raum

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} : \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{d^\beta f}{dx^\beta}(x) \right| < \infty \right\}.$$

Für eine Funktion  $f \in \mathcal{S}$  definieren wir die *Fourier-Transformierte*  $\mathcal{F}(f)$  von  $f$  durch

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x y} dx.$$

Wir verwenden ohne Beweis:

**Satz 2** (Poissonsche Summenformel). *Für  $f \in \mathcal{S}$  gilt:  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)$ .*

Wir wenden Satz (1) auf die Funktionen

$$f_{\tau,z}(x) = e^{\frac{\pi i(\ell+2mx)^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i(\ell+2mx)z}$$

an und berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f_{\tau,z})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i(\ell+2mx)^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i z(\ell+2mx)} e^{2\pi i x y} dx \\ &= e^{2\pi i \ell(z + \frac{\ell\tau}{4m})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m \tau \left[ x^2 + \left( \frac{\ell\tau + 2mz + y}{m\tau} \right) x \right]} dx \\ &= e^{2\pi i \ell(z + \frac{\ell\tau}{4m})} e^{-\frac{\pi i(\ell\tau + 2mz + y)^2}{2m\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{-2\pi i m \tau}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-2\pi i m \tau}} e^{-\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} e^{-\frac{\pi i(y^2 + 2\ell\tau y + 4zm y)}{2m\tau}}. \end{aligned}$$

Hierin wurde im dritten Schritt die Substitution

$$u = \sqrt{-2\pi i m \tau} \left( x + \frac{\ell\tau + 2mz + y}{2m\tau} \right) \quad \left( du = \sqrt{-2\pi i m \tau} dx \right)$$

vorgenommen. Die letzte Gleichheit folgt aus folgendem bekannten Integral, welches wir ohne Beweis verwenden:

**Satz 3.** *Es gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .*

Aus Satz (1) folgt nun

$$\begin{aligned}
\vartheta_{m,\ell}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(f_{-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}}\right)(n) \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi imz^2}{\tau}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i \ell n}{2m}} e^{\frac{2\pi in^2 \tau}{4m}} e^{2\pi inz} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi imz^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell \nu}{m}} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \nu \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi ir^2 \tau}{2m}} e^{2\pi irz} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi imz^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell \nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z).
\end{aligned}$$

Zum Vergleich können Sie den Beweis einer ähnlichen Aussage in [1], Kapitel 5, §4.2 finden.

#### LITERATUR

- [1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.
- [2] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 1–537.
- [3] K. Ireland, M. Rosen, A classical introduction to modern number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–389.
- [4] K. Ono, The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and  $q$ -series, CBMS regional conference series in mathematics **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.