UNÄRE THETA-REIHEN ([1], S. 58–59, [2], S. 348–349, [3], S. 50–51, [4], S. 10–12)

Es seien $m > 0$ und ℓ ganze Zahlen. Wir definieren die *Jacobischen Theta-Reihen* ($z \in \mathbb{C}$, $\tau \in \mathbb{H}$)

$$\vartheta_{m,\ell}(\tau, z) = \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r \equiv \ell \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i r z}.$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie die Transformationseigenschaften von $\vartheta_{m,\ell}$ behandeln. Die Jacobischen Theta-Reihen sind Beispiele von sogenannten *Jacobiformen.* Zeigen Sie (s. Anhang):

$$\vartheta_{m,\ell}\left(\tau + 1, z\right) = e^{\frac{\pi i \ell^2}{2m}} \vartheta_{m,\ell}\left(\tau, z\right),$$

$$\vartheta_{m,\ell}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{r \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell r}{m}} \vartheta_{m,r}\left(\tau, z\right).$$

Die Funktionen $\vartheta_{m,\ell}$ liefern auch Beispiele von sogenannten *unären Theta-Reihen*, die eine bedeutende Rolle in der Theorie der Modulformen spielen. Definieren Sie unäre Theta-Reihen (s. [4], S. 10-12). Führen Sie hierzu zunächst *gerade* und *ungerade Dirichlet-Charaktere* $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *modulo* $N \in \mathbb{N}$ ein.

Zu einem Dirichlet-Charakter χ definieren wir nun

$$\theta_\chi\left(\tau\right) = \begin{cases} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) e^{2\pi i n^2 \tau} & \text{falls } \chi \text{ gerade ist,} \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(n) n e^{2\pi i n^2 \tau} & \text{falls } \chi \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Definieren Sie auch das *Jacobisymbol* $\left(\frac{c}{d}\right)$ (s. [3], S. 51 und [4], S. 11) und

$$\varepsilon_d = \begin{cases} 1 & \text{falls } d \equiv 1 \pmod 4, \\ i & \text{falls } d \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Geben Sie schließlich ohne Beweis die folgenden Transformationsgesetze von θ_χ an.

Proposition 1.

(1) *Es sei χ ein gerader Dirichlet-Charakter modulo N und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $4N^2 \mid c$. Dann gilt:*

$$\theta_\chi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} \left(c\tau + d\right)^{\frac{1}{2}} \chi(d) \Theta_\chi(\tau).$$

(2) *Es sei χ ein ungerader Dirichlet-Charakter modulo N und $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit $4N^2 \mid c$. Dann gilt:*

$$\theta_\chi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \left(\frac{-4c}{d}\right) \varepsilon_d^{-3} \left(c\tau + d\right)^{\frac{3}{2}} \chi(d) \Theta_\chi(\tau).$$

Beweis der Transformationseigenschaft der Theta-Reihen

Wir wollen folgende Transformationseigenschaft der *Jacobischen Theta-Reihen*

$$\vartheta_{m,\ell}(\tau, z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{\frac{\pi i(\ell+2mk)^2\tau}{2m}} e^{2\pi i(\ell+2mk)z}$$

beweisen:

$$\vartheta_{m,\ell}\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{2mi}}\, e^{\frac{2\pi imz^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i\ell\nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z)\,.$$

Hierzu betrachten wir den Raum

$$\mathcal{S} = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \,:\, \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{d^\beta f}{dx^\beta}(x) \right| < \infty \right\}.$$

Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die *Fourier-Transformierte* $\mathcal{F}(f)$ von f durch

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ixy} dx.$$

Wir verwenden ohne Beweis:

Satz 2 (Poissonsche Summenformel)**.** *Für $f \in \mathcal{S}$ gilt:* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}(f)(n)$.

Wir wenden Satz 2 [redacted] auf die Funktionen

$$f_{\tau,z}(x) = e^{\frac{\pi i(\ell+2mx)^2\tau}{2m}} e^{2\pi i(\ell+2mx)z}$$

an und berechnen

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f_{\tau,z})(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\pi i(\ell+2mx)^2\tau}{2m}} e^{2\pi iz(\ell+2mx)} e^{2\pi ixy} dx \\
&= e^{2\pi i\ell\left(z+\frac{\ell\tau}{4m}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi im\tau\left[x^2+\left(\frac{\ell\tau+2mz+y}{m\tau}\right)x\right]} dx \\
&= e^{2\pi i\ell\left(z+\frac{\ell\tau}{4m}\right)} e^{-\frac{\pi i(\ell\tau+2mz+y)^2}{2m\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{-2\pi im\tau}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-2im\tau}}\, e^{-\frac{2\pi imz^2}{\tau}} e^{-\frac{\pi i\left(y^2+2\ell\tau y+4zmy\right)}{2m\tau}}.
\end{aligned}$$

Hierin wurde im dritten Schritt die Substitution

$$u = \sqrt{-2\pi im\tau}\left(x + \frac{\ell\tau + 2mz + y}{2m\tau}\right) \qquad \left(du = \sqrt{-2\pi im\tau}\, dx\right)$$

vorgenommen. Die letzte Gleichheit folgt aus folgendem bekannten Integral, welches wir ohne Beweis verwenden:

Satz 3. *Es gilt* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Aus Satz 2 [redacted] folgt nun

$$\begin{aligned}
\vartheta_{m,\ell}\left(-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}\right) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_{-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}}(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\left(f_{-\frac{1}{\tau},\frac{z}{\tau}}\right)(n) \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\frac{2\pi i \ell n}{2m}} e^{\frac{2\pi i n^2 \tau}{4m}} e^{2\pi i n z} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell \nu}{m}} \sum_{\substack{r\in\mathbb{Z} \\ r\equiv\nu \pmod{2m}}} e^{\frac{\pi i r^2 \tau}{2m}} e^{2\pi i r z} \\
&= \sqrt{\frac{\tau}{2mi}} e^{\frac{2\pi i m z^2}{\tau}} \sum_{\nu \pmod{2m}} e^{-\frac{\pi i \ell \nu}{m}} \vartheta_{m,\nu}(\tau, z)\,.
\end{aligned}$$

Zum Vergleich können Sie den Beweis einer ähnlichen Aussage in [1], Kapitel 5, §4.2 finden.

Literatur

[1] M. Eichler, D. Zagier, The Theory of Jacobi Forms, Progress in Mathematics **55**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985, 1–148.

[2] E. Freitag, R. Busam, Funktionentheorie 1, Springer-Verlag, Berlin, 2006, 1–537.

[3] K. Ireland, M. Rosen, A classical introduction to modern number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 1–389.

[4] K. Ono, The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and q-series, CBMS regional conference series in mathematics **102**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.