SUMMEN VON ZWEI QUADRATEN ([1], S. 12, 16–20, 26–27)

Es sei $n \geq 0$ eine ganze Zahl. Ziel Ihres Vortrages ist es, eine Formel für die Anzahl

$$r_2(n) = \#\left\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 | a^2 + b^2 = n\right\}$$

der Darstellungen von n als die Summe von zwei Quadraten herzuleiten. Hierbei ist es hilfreich, zunächst die Erzeugendenfunktion ($q = e^{2\pi i\tau}$, $\tau \in \mathbb{H}$)

$$f(\tau) = \sum_{n \geq 0} r_2(n) q^n$$

zu untersuchen.

Definieren Sie *diskrete Untergruppen* $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sowie den Raum $M_k(\Gamma)$ der Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ zu Γ. Sie können folgenden Satz ohne Beweis verwenden.

Satz 1. *Es sei Γ eine diskrete Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so dass $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ endliches Maß $V = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} y^{-2}\,dx\,dy$ hat. Dann gilt $\dim\left(M_k(\Gamma)\right) \leq \frac{kV}{4\pi} + 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$.*

Definieren Sie die Gruppe $\Gamma_0(4)$ sowie den Charakter

$$\chi_{-4}(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1 & \text{if } n \equiv -1 \pmod 4, \\ 0 & \text{if } n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Eine Funktion $F : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ nennen wir *Modulform vom Gewicht k und Charakter χ_{-4} zu $\Gamma_0(4)$*, falls für jedes $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(4)$ und jedes $\tau \in \mathbb{H}$

$$F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi_{-4}(d)\,(c\tau + d)^k\,F(\tau)$$

gilt.

Beweisen Sie folgenden Zusammenhang zwischen der Erzeugendenfunktion f und der Jacobischen Theta-Funktion

$$\Theta(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}$$

aus dem zweiten Vortrag.

Satz 2. *Die Funktion f ist eine Modulform vom Gewicht 1 und Charakter χ_{-4} zu $\Gamma_0(4)$. Es gilt $f(\tau) = \Theta(\tau)^2$.*

Benutzen Sie nun Satz 1 und 2, um folgende Formel für $r_2(n)$ zu beweisen.

Satz 3. *Es sei $n > 0$ eine ganze Zahl. Dann gilt*

$$r_2(n) = 4 \sum_{\substack{d | n \\ d \text{ odd}}} (-1)^{\frac{d-1}{2}}. \tag{1}$$

Betrachten wir die Summe auf der rechten Seite von (1) für eine Primzahl $n = p$, so erhalten wir:

Folgerung 4 (Fermat)**.** *Jede Primzahl $p \equiv 1 \pmod 4$ ist die Summe von zwei Quadraten.*

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, The 1-2-3 of modular forms, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008