DIE JACOBI-TRIPEL-PRODUKT-GLEICHUNG ([1], S. 1–13, 30–37)

In Ihrem Vortrag sollen Sie die *Jacobi-Tripel-Produkt-Gleichung* beweisen. Hierzu schreiben wir ($n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $a \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{H}$):

$$(a;q)_n = \prod_{m=0}^{n-1} (1 - aq^m)\,.$$

Satz 1 (Jacobi-Tripel-Produkt). *Es seien $a, q \in \mathbb{C}$ mit $|aq| < 1$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a^m q^{m^2} = \left(q^2;q^2\right)_\infty \left(-aq;q^2\right)_\infty \left(-\frac{q}{a};q^2\right)_\infty . \tag{1}$$

Jacobi bewies Gleichung (1) zuerst im Jahr 1829. Ramanujan leitet (1) unabhängig davon aus der sogenannten Ramanujanschen ${}_1\Psi_1$-Summations-Formel her (siehe Eintrag 19, Kapitel 16, Teil III von „Ramanujan's Notebooks“ [1]).

Satz 2 (${}_1\Psi_1$-Summations-Formel). *Es seien $\alpha, \beta, z, q \in \mathbb{C}$, so dass $|\beta q| < |z| < \frac{1}{|\alpha q|}$. Dann gilt:*

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\alpha};q^2\right)_k (-\alpha q)^k}{(\beta q^2;q^2)_k} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\beta};q^2\right)_k (-\beta q)^k}{(\alpha q^2;q^2)_k} z^{-k}$$
$$= \frac{(-qz;q^2)_\infty \left(-\frac{q}{z};q^2\right)_\infty (q^2;q^2)_\infty (\alpha\beta q^2;q^2)_\infty}{(-\alpha qz;q^2)_\infty \left(-\frac{\beta q}{z};q^2\right)_\infty (\alpha q^2;q^2)_\infty (\beta q^2;q^2)_\infty}.$$

In Ihrem Vortrag sollen Sie Ramanujans Beweis folgen und zunächst die ${}_1\Psi_1$-Summations-Formel beweisen. Erläutern Sie jeden Schritt im Detail und gehen Sie auf die Schwierigkeiten ein, die in dem Beweis auftreten. Erinnern Sie insbesondere an das Konzept der analytischen Fortsetzung.

Geben Sie in Ihrem Vortrag schließlich einige der Spezialfälle der Jacobi-Tripel-Produkt-Gleichung an, denen besondere Bedeutung zukommt. Hierzu definieren wir die *Dedekindsche η-Funktion* ($\tau \in \mathbb{H}$, $q = e^{2\pi i\tau}$)

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n\in\mathbb{N}} (1 - q^n) = q^{\frac{1}{24}} (q;q)_\infty\,.$$

Leiten Sie nun aus (1) folgenden Zusammenhang zwischen η und der Jacobischen Theta-Funktion aus dem zweiten Vortrag her.

Folgerung 3. *Es gilt*

$$\Theta(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2}.$$

Folgern Sie schließlich auch *Eulers Pentagonalzahlensatz.*

Folgerung 4. *Es gilt*

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

Literatur

[1] B. Berndt, Ramanujan's Noteooks, Part III, Springer Verlag, New York, NY, 1991.