DIE THETA-REIHE EINER QUADRATISCHEN FORM ([1], S. 31–33, [2], S. 268–273)

Wir nennen ein Polynom in m Unbestimmten $Q : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{C}$ eine *quadratische Form*, falls sie für $x \in \mathbb{Z}^m$ und $\ell \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$Q(\ell x) = \ell^2 Q(x)$$

erfüllt. Falls $Q(\mathbb{Z}^m) \subseteq \mathbb{Z}$, so sagen wir Q nimmt *ganzzahlige Werte* an. Gilt $Q(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\}$, so nennen wir Q *positiv definit*. Es sei nun Q eine positiv definite quadratische Form mit ganzzahligen Werten. Wir bezeichnen mit $R_Q(n)$ die Anzahl der Darstellungen von $n \in \mathbb{N}$ durch Q, d.h. die Anzahl der Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{Z}^m$ mit $Q(x) = n$. Schließlich definieren wir die zu Q gehörige *Theta-Reihe*

$$\Theta_Q(\tau) = \sum_{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{Z}^m} q^{Q(x_1,\ldots,x_m)} = \sum_{n=0}^{\infty} R_Q(n) q^n.$$

Ziel Ihres Vortrages ist es, die Transformationseigenschaften der Theta-Reihen $\Theta_Q(\tau)$ zu untersuchen. Hierzu schreiben wir $Q(x)$ explizit als

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T A x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j,$$

worin $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le m}$ eine symmetrische $m \times m$ Matrix ist.

Im zweiten Vortrag hatten wir eine Transformationsformel für die Jacobische Theta-Funktion $\Theta(\tau)$ bewiesen:

$$\Theta\left(-\frac{1}{4\tau}\right) = \sqrt{\frac{2\tau}{i}}\,\Theta(\tau). \tag{1}$$

Die Jacobische Theta-Funktion ist die zu der quadratischen Form $Q(x) = x^2$ gehörige Theta-Reihe. Verallgemeinern Sei nun (1) und leiten Sie eine Transformationsformel für die Theta-Reihe $\Theta_Q(\tau)$ einer beliebigen positiv definiten quadratischen Form $Q(x)$ mit ganzzahligen Werten her. Definieren Sie hierfür zunächst die *Stufe* sowie die *Diskriminante* einer quadratischen Form. Benutzten Sie nun den Satz über Fourier-Reihen auf Seite 269 in [2] ohne Beweis und zeigen Sie:

Satz 1. *Es sei $k \in \mathbb{N}$ und $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ eine positive definite quadratische Form mit ganzzahligen Werten der Stufe N mit Diskriminante Δ. Es sei $Q(x) = \frac{1}{2}x^T A x$ und $Q_*(x) = x^T N A^{-1} x$ die durch NA^{-1} definierte quadratische Form. Dann gilt*

$$\Theta_Q\left(-\frac{1}{N\tau}\right) = N^{\frac{k}{2}} \left(\frac{\tau}{i}\right)^k \Theta_{Q_*}(\tau).$$

Um hieraus ein Transformationsgesetz für Θ_Q herzuleiten, definieren wir die Untergruppe $\Gamma_0(N) \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Desweiteren benötigen wir den Dirichlet-Charakter $\chi_\Delta(n) = \left(\frac{\Delta}{n}\right)$. Geben Sie folgenden Satz ohne Beweis an:

Satz 2. *Es sei Q wie in Satz 1. Dann ist die Theta-Funktion Θ_Q eine Modulform vom Gewicht k und Charakter χ_Δ zu $\Gamma_0(N)$, d.h. für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$ gilt*

$$\Theta_Q\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \chi_\Delta(a)(c\tau + d)^k \Theta_Q(\tau).$$

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, The 1-2-3 of modular forms, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008

[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.