INVARIANTEN VON GERADEN UNIMODULAREN GITTERN ([1], S. 15–16, S. 23, S. 32–34)

Ziel Ihres Vortrages ist es, *gerade unimodulare quadratische Formen* zu untersuchen (d.h. quadratische Formen $Q(x)$ deren zugehörige Matrix A gerade und unimodular ist). Satz 1 aus vorangegangenem Vortrag besagt, dass die zu einer positiv definiten, geraden, unimodularen quadratischen Form Q gehörige Theta-Reihe $\Theta_Q(\tau)$ eine Modulform zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit trivialem Charakter ist. Hieraus ergeben sich zahlreiche Folgerungen. Beweisen Sie:

Satz 1. *Es sei $Q : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite, gerade, unimodulare quadratische Form. Dann ist m durch 8 teilbar.*

Erinnern Sie an die Definition von Eisenstein-Reihen und Spitzenformen und daran, dass jede Modulform zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch eine eindeutige Linearkombination einer Eisenstein-Reihe und einer Spitzenform vom gleichen Gewicht gegeben ist. Beweisen Sie:

Satz 2. *Es sei $f(\tau)$ eine Spitzenform vom Gewicht k zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit Fourier-Reihe $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$. Dann gibt es eine Konstante C, so dass $|a_n| \leq C n^{\frac{k}{2}}$ für alle n gilt.*

Leiten Sie schließlich aus Satz 2 folgenden Satz her.

Satz 3. *Es sei $Q : \mathbb{Z}^{2k} \to \mathbb{Z}$ eine positiv definite, gerade, unimodulare quadratische Form. Dann ist die Anzahl $R_Q(n)$ der Darstellungen von $n \in \mathbb{N}$ durch Q asymptotisch durch*

$$R_Q(n) = \frac{-2k}{B_k}\sigma_{k-1}(n) + O\left(n^{\frac{k}{2}}\right) \quad (n \to +\infty)$$

gegeben, worin B_k die k-te Bernoullische Zahl ist.

Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, The 1-2-3 of modular forms, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008