HARMONISCHE POLYNOME UND THETA-REIHEN ([1], S. 289–293)

In Ihrem Vortrag sollen Sie verallgemeinerte Theta-Reihen zu einer quadratischen Form $Q(x)$ untersuchen. Hierzu sei $\mathcal{P}_r^{(m)}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der homogenen Polynome $P(x) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_m]$ in m Variablen vom Grad $r \in \mathbb{N}_0$. Wir schreiben $x = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_m \end{pmatrix}^T$ und nennen $P(x) \in \mathcal{P}_r^{(m)}$ *harmonisch*, wenn es von dem *Laplace-Operator*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$$

annihiliert wird, d.h. falls

$$\Delta(P) \equiv 0.$$

Wir bezeichnen den Vektorraum der harmonischen Polynome $P(x) \in \mathcal{P}_r^{(m)}$ mit $\mathcal{H}_r^{(m)}$. Beweisen Sie folgende Charakterisierung.

Satz 1. *Es sei $n \geq 2$ und $r \in \mathbb{N}_0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $P(x) \in \mathcal{H}_r^{(m)}$

(ii) *$P(x)$ ist eine endliche Linearkombination von Polynomen der Gestalt $\left(u^T x\right)^r$ mit $u \in \mathbb{C}^m, u^T u = 0$.*

Es sei nun $P(x) \in \mathcal{H}_r^{(m)}$ und S eine positiv definite $m \times m$ Matrix. Wir definieren die zu S und P gehörige *Theta-Reihe*

$$\Theta(\tau; S, P) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^m} P\left(S^{\frac{1}{2}} g\right) e^{2\pi i \tau g^T S g},$$

worin $S^{\frac{1}{2}}$ wie auf S. 261 in [1] definiert ist.

Zeigen Sie, dass $\Theta(\tau; S, P)$ eine Spitzenform ist, falls der Grad von P positiv und gerade ist.

Satz 2. *Es sei S eine symmetrische, positiv definite, gerade, unimodulare Matrix, $r > 0$ gerade und $P(x) \in \mathcal{H}_r^{(m)}$ ein harmonisches Polynom vom Grad r. Dann ist die zugehörige Theta-Reihe $\Theta(\tau; S, P)$ eine Spitzenform vom Gewicht $r + \frac{m}{2}$ zu $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Literatur

[1] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.