## DIE MINKOWSKI-SIEGEL-FORMEL ([1], S. 34–35, [2], S. 222–224, 286–288)

Ziel Ihres Vortrages ist es, die bedeutende Minkowski-Siegel-Formel zu untersuchen, die vereinfachend ausgedrückt die Äquivalenzklassen von geraden unimodularen quadratischen Formen berechnet.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z})$ die Menge aller $n \times n$ Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Wir nennen zwei quadratische Formen $Q_1 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ und $Q_2 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ *äquivalent*, falls es eine Matrix $\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) = \left\{ M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z}) \middle| \det(M) = 1 \right\}$ gibt, so dass $Q_1(\gamma x) = Q_2(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ gilt. Es gibt nur endlich viel Äquivalenzklassen von quadratischen Formen mit einer gegebenen Diskriminante. Viele interessante Eigenschaften einer quadratischen Form $Q$ hängen nur von der Äquivalenzklasse $[Q]$ ab. Insbesondere stimmen die zu äquivalenten quadratischen Formen gehörenden Theta-Reihen überein.

Der Hauptsatz Ihres Vortrages ist der Satz von Siegel, der einen gewichteten Durchschnitt der Darstellungszahlen $R_Q(n)$ der Äquivalenzklassen positiv definiter, gerader, unimodularer quadratischer Formen mit ganzzahligen Werten mit den Koeffizienten der Eisenstein-Reihen aus dem ersten Vortrag in Verbindung bringt. Hierzu sei

$$w(Q) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}) \,|\, \forall x \in \mathbb{Z}^n : Q(\gamma x) = Q(x)\}.$$

Wir definieren die normalisierten Eisenstein-Reihen

$$E_k = -\frac{k}{B_k} \cdot \frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k} G_k,$$

deren 0. Koeffizienten gleich 1 sind. Weiter sei

$$m_k = \frac{B_k}{k} \cdot \frac{B_2}{4} \cdot \frac{B_4}{8} \cdots \frac{B_{2k-2}}{4k-4}.$$

**Satz 1.** *[Satz von Siegel] Es sei $k \equiv 0 \pmod 8$. Dann ist die Anzahl der Äquivalenzklassen gerader, unimodularer quadratischer Formen in $k$ Variablen endlich. Es sei $Q_1, \ldots, Q_\ell$ ein vollständiges Vertretersystem jener Klassen. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{w(Q_i)} \Theta_{Q_i}(\tau) = m_k E_k(\tau). \tag{1}$$

Wir erhalten somit die Minkowski-Siegel-Formel:

**Satz 2.** *Es seien $Q_1, \ldots, Q_\ell$ wie in Satz 1. Dann gilt*

$$\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{w(Q_i)} = m_k.$$

Es würde den Rahmen des Seminares sprengen, einen vollständigen Beweis des Satzes von Siegel zu geben. Sie sollen in Ihrem Vortrag aber den Beweis dafür skizzieren, dass die beiden Modulformen auf der linken bzw. rechten Seite von (1) bis auf Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Konstanten übereinstimmen. Hierzu benötigen wir Ergebnisse aus der Theorie der *Hecke-Operatoren* $T_m$. Der Operator $T_m$ bildet den Raum der Modulformen vom Gewicht $k$ auf sich selber ab. Wenn $f(\tau)$ die Fourier-Reihe $f(\tau) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r e^{2\pi i r\tau}$ hat, dann gilt

$$T_m f(\tau) = \sum_{r=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{d|\mathrm{ggT}(m,r) \\ d>0}} d^{k-1} a_{\frac{mr}{d^2}} \right) e^{2\pi i r\tau}.$$

Eine von Null verschiedene Modulform $f(\tau)$, die für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Gleichung $T_m f = \lambda_m f$ für ein $\lambda_m \in \mathbb{C}$ erfüllt, nennen wir *Hecke-Eigenform.* Sie können ohne Beweis benutzen, dass die Eigenwerte einer Hecke-Eigenform diese bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmen:

**Satz 3.** *Es sei $f(\tau)$ eine Hecke-Eigenform vom Gewicht $k$. Es sei $\lambda_m$ der zu $f(\tau)$ gehörige Eigenwert von $T_m$. Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit*

$$f(\tau) = c \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r e^{2\pi i r z}.$$

Sie können ohne Beweis benutzen, dass $f(\tau)$ schon dann eine Hecke-Eigenform ist, wenn für alle Primzahlen $p$, die Gleichung $T_p f = \lambda_p f$ gilt:

**Satz 4.** *Es sei $f(\tau)$ eine Modulform vom Gewicht $k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *$f$ ist eine Hecke-Eigenform.*
(2) *Zu jeder Primzahl $p$ gibt es $\lambda_p \in \mathbb{C}$ mit $T_p f = \lambda_p f$.*

Um Satz 1 zu beweisen, ist darüberhinaus folgender Satz hilfreich. Zeigen Sie:

**Satz 5.** *Es seien $\lambda_m$ die Eigenwerte einer Hecke-Eigenform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$, dann gilt für jedes $m, r \in \mathbb{N}$*

$$\lambda_m \lambda_r = \sum_{\substack{d|ggT(m,r) \\ d>0}} d^{k-1} \lambda_{\frac{mr}{d^2}}.$$

Aus den Sätzen 3, 4 und 5 folgt die Identität (1) (bis auf Multiplikation mit einer Konstanten $c \neq 0$), wenn wir zeigen können, dass die Modulformen auf der rechten und auf der linken Seite von (1) für jede Primzahl $p$ im gleichen Eigenraum von $T_p$ liegen.

Sie können folgenden Satz ohne Beweis verwenden.

**Satz 6.** *Es sei $p$ eine Primzahl und $f(\tau) = \sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{w(Q_i)} \Theta_{Q_i}(\tau)$. Dann gilt*

$$T_p(f) = \left(p^{k-1} + 1\right) f.$$

Berechnen Sie nun explizit das Bild der Eisenstein-Reihe unter den Hecke-Operatoren $T_p$, um den Beweis des Satzes von Siegel (bis auf die Bestimmung der Konstanten $m_k$) abzuschließen.

**Satz 7.** *Es sei $k$ eine ganze Zahl und $p$ eine Primzahl. Dann gilt*

$$T_p\left(E_k\right) = \left(p^{k-1} + 1\right) E_k.$$

Gehen Sie schließlich einige Anwendungen von Siegels Satz an. Berechnen Sie die Zahlen $m_k$ für $k = 8, 16, 24, 32$. Folgern Sie aus Satz 1, dass es mindestens zwei nicht-äquivalente gerade, unimodulare, quadratische Formen in 24 Variablen gibt. Geben Sie an, wieviele Äquivalenzklassen derartiger quadratischer Formen es gibt.

Schließen Sie aus Satz 2, dass es mindestens 80000000 Äquivalenzklassen gerader, unimodularer quadratischer Formen in 32 Variablen gibt.

## Literatur

[1] J. H. Bruinier, G. van der Geer, G. Harder, D. Zagier, The 1-2-3 of modular forms, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008

[2] M. Koecher, A. Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer-Verlag, Berlin, 1998, 1–331.