Since

$$\int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-x^2/4t}\, dx = 2^{s-1}\, t^{s/2} \int_0^\infty e^{-w}\, w^{s/(2-1)}\, dw$$

$$= 2^{s-1}\, t^{s/2}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \tag{23.3}$$

using a simple change of variable, we end up with the result

$$\int_0^\infty f(x)\, x^{s-1}\, dx = 2^{s-1}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \int_0^\infty e^{-t}\, t^{(s/2-1/2)}\, dt$$

$$= 2^{s-1}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right). \tag{23.4}$$

The duplication formula for the gamma function

$$\sqrt{\pi}\, \Gamma(s) = 2^{s-1}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{2}\right) \tag{23.5}$$

shows the equality of the Mellin transforms of $f(x)$ and the function $\sqrt{\pi} e^{-x}$, invoking standard uniqueness theorems. Hence

$$\sqrt{\pi}\, e^{-x} = \int_0^\infty e^{-t-(x^2/4t)}\, \frac{dt}{\sqrt{t}}. \tag{23.6}$$

Alternatively, we can use this formula to derive the duplication formula.

Comments and References

For the duplication formula, see Whittaker and Watson, p. 240. The above result is due to Legendre. The general result

$$(2\pi)^{(n-1)/2}\, n^{(1/2)-nz}\, \Gamma(nz) = \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(z + \frac{n-1}{n}\right)$$

is due to Gauss. Using this formula, we can obtain a representation of the form

$$\exp(-x^{1/n}) = k_n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \exp\left(-\frac{(t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1}) - x}{t_1 t_2 \dots t_{n-1}}\right)$$
$$\times\, t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_{n-1}^{a_{n-1}}\, dt_1 \dots dt_{n-1}$$

for suitable choice of the exponents $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$, where k_n is a constant independent of x. We leave this to the reader.

24. The Riemann Zeta Function

Let us now pursue an apparently tangential path. We wish to consider one of the most fascinating and glamorous functions of analysis, the Riemann zeta function. The connection between this function and theta functions was extensively discussed by Riemann.

This function, $\zeta(s)$, is defined for $Re(s) > 1$ by the simplest of Dirichlet series, the series

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{24.1}$$

Clearly, this defines an analytic function for $Re(s) > 1$. Since the most interesting properties of $\zeta(s)$ are tied to the region $0 \leq Re(s) \leq 1$, let us examine the question of analytic continuation. We shall follow a trail blazed by Riemann, leading from the theta function to the zeta function.

Consider the function

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}, \tag{24.2}$$

whose Mellin transform is readily obtained. For $Re(s) > \frac{1}{2}$, we have

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} g(t)\, t^{s-1}\, dt &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\right) t^{s-1}\, dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}\pi^s} \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt \\ &= \frac{\Gamma(s)}{\pi^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}}. \end{aligned} \tag{24.3}$$

(The condition $Re(s) > \frac{1}{2}$ arises in two ways, one is to ensure the convergence of the integral and the other is to ensure the connergence of the series.)

We thus obtain an important representation

$$\frac{\Gamma(s/2)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \int_0^{\infty} t^{(s/2)-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi t}\right) dt, \tag{24.4}$$

valid for $Re(s) > \frac{1}{2}$. To obtain the analytic continuation of $\zeta(s)$ we shall use the functional equation of the theta function.

Write

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)\, \pi^{-s/2} = \int_0^{\infty} t^{(s/2)-1} g(t)\, dt = \int_0^1 + \int_1^{\infty}. \tag{24.5}$$

In the interval $[0,1]$, let us replace $g(t)$ by its equivalent obtained from the transformation formula,

$$g(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} t^{-1/2} + t^{-1/2} g\left(\frac{1}{t}\right), \tag{24.6}$$

(a result obtained first in Section 9).

Then

$$\frac{\Gamma(s/2)\,\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \int_0^1 \left(-\frac{1}{2} + \frac{t^{-1/2}}{2}\right) t^{(s/2)-1}\,dt + \int_0^1 g\left(\frac{1}{t}\right) t^{(s/2)-(3/2)}\,dt$$

$$+ \int_1^\infty t^{(s/2)-1} g(t)\,dt. \tag{24.7}$$

In the second integral, make the change of variable $t' = 1/t$. Evaluating the first integral, we obtain finally

$$\frac{\Gamma(s/2)\,\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right) + \int_1^\infty [t^{s/2} + t^{(1-s)/2}]\, g(t)\,\frac{dt}{t}\,. \tag{24.8}$$

Since $| g(t) | = 0\,(e^{-\pi t})$ as $t \to \infty$, we see that the integral is an entire function of s.

It follows that $\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$ is analytic except at the points $s = 0$ and $s = 1$, where it possesses simple poles. Since $\Gamma(s/2)$ has a simple pole at $s = 0$, we see that $\zeta(s)$ is analytic over the entire s plane, except at $s = 1$, where it possesses a simple pole. Since $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, we see that

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \dots \tag{24.9}$$

in the neighborhood of $s = 1$, a result we shall use below.

We have thus solved the problem of the analytic continuation of $\zeta(s)$ over the entire s plane. We can, however, obtain much more from the identity of 24.8. Observe that the expression on the right-hand side of 24.8 is invariant under the change of variable $s' = 1 - s$.

It follows that we have the remarkable functional equation

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2}\,\zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2}\,\zeta(1-s) \tag{24.10}$$

for $s \neq 0$ or 1.

Comments and References

This was the second method used by Riemann to derive the functional equation. See

Riemann, B., "Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grosse." *Werke*, 2, pp. 145-153, 1892. (Collected Works of Bernhard Riemann, Dover, 1953).

25. An Alternate Form of the Functional Equation

The duplication formula for the gamma function, a result we have already encountered, permits us to write the functional equation in the form

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s \zeta(1-s)}{\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}. \tag{25.1}$$

To obtain this from 24.10, we must also use the formula

$$\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(1-s)}{2}\right)}.$$

This is occasionally a more convenient expression to employ.

26. The Riemann Hypothesis

The functional equation of 24.10 shows that the function $\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)$ is symmetric about $s = \frac{1}{2}$. Consequently, it is to be expected that this line will play an important role in the theory of the zeta function. On the basis of the functional equation and an asymptotic formula derived in a way we shall subsequently discuss, Riemann conjectured that all of the zeroes of $\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$ were on the line $s = \frac{1}{2} + it$.

Despite the apparent simplicity of the function, this statement has never been confirmed or refuted. As a result of the concentrated effort of a number of mathematicians—Hadamard, De La Vallee Poussin, Gronwall, Landau, Hardy, Littlewood, Ingham, Titchmarsh, and Selberg—a great deal has been learned about the distribution of the zeroes of $\zeta(s)$. The calculations of digital computers based upon various formulas confirm the hypothesis as far as they go. Nevertheless, the Riemann hypothesis remains one of the outstanding challenges of mathematics, a prize which has tantalized and eluded some of the most brilliant mathematicians of this century.

The Euler factorization

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \qquad Re(s) > 1, \tag{26.1}$$

where the product is taken over the primes $p = 2, 3, 5, \ldots$, shows the intimate connection between the analytic properties of $\zeta(s)$ and the distribution of primes. It is an analytic expression of the result of Euclid concerning unique factorization. Although it can be deduced from this expression that $\zeta(s) \neq 0$ for $Re(s) > 1$, further results, meager as they are, are obtained only at great effort.

Kapitel III.

Modulformen

Einleitung

1. Vorbemerkung. Wie die elliptischen Funktionen unter gewissen Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$, nämlich den Translationen eines Gitters, in sich übergehen, so sind die *Modulfunktionen* unter geeigneten Selbstabbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$, nämlich den *Modulsubstitutionen*

$$\tau \longmapsto M\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma := SL(2;\mathbb{Z})$$

invariant. Das wichtigste Beispiel einer solchen Funktion, die überdies auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, ist die *absolute Invariante* $j = j(\tau)$, die wir bereits in I.4.4 und in II.E.3 kennen gelernt haben. Es wird sich herausstellen, dass man mit j alle Modulfunktionen beschreiben kann.

2. Mögliches Transformationsverhalten. Neben Funktionen, die unter den Modulsubstitutionen invariant bleiben, sind aber auch Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ von Interesse, die unter den Modulsubstitutionen wenigstens noch ein übersichtliches Verhalten aufweisen:

$$f(M\tau) = \gamma_M(\tau) \cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma. \tag{1}$$

Dabei sei $\gamma_M(\tau)$ ein „elementarer“ Faktor, der noch genauer festgelegt werden muss. Schreibt man (1) für MN anstelle von M und verwendet $(MN)\tau = M(N\tau)$, so erhält man (im Fall $f(\tau) \neq 0$) die Bedingung

$$\gamma_{MN}(\tau) = \gamma_M(N\tau) \cdot \gamma_N(\tau) \quad \text{für} \quad M, N \in \Gamma \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H} \tag{2}$$

an γ. Diese „Cozykel–Bedingung“ hat Ähnlichkeit mit der Kettenregel der Differentiation. In der Tat erfüllen

$$\gamma_M(\tau) := \frac{dM\tau}{d\tau} = (c\tau + d)^{-2} \tag{3}$$

und jede Potenz davon (2). Die auf diese Weise für jede gerade Zahl k entstehende Transformationsformel

$$f(M\tau) = (c\tau + d)^k \cdot f(\tau) \quad \text{für} \quad M \in \Gamma \tag{4}$$

ist dann charakteristisch für die so genannten *Modulformen*. Da die Gruppe der Modulsubstitutionen gemäß Korollar II.2.1A durch die Abbildungen

$$\tau \longmapsto \tau + 1 \quad \text{und} \quad \tau \longmapsto -1/\tau \tag{5}$$

erzeugt wird, kann man (4) durch die beiden Bedingungen

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^k \cdot f(\tau) \tag{6}$$

ersetzen.

In I.4.1 hatten wir gesehen, dass die EISENSTEIN–Reihen G_k Beispiele von solchen Funktionen sind. Es soll noch ein weiteres Beispiel skizziert werden, das ein zu (6) analoges Transformationsverhalten besitzt:

3. Die klassische Theta–Reihe. In seinen Briefen an GOLDBACH vom 4. 5. 1748 und 17. 8. 1750 behandelt L. EULER im Reellen bereits die *Theta–Reihe*

$$\vartheta(\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2 \tau} = 1 + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \quad \text{mit} \quad q := e^{\pi i \tau} \quad \text{und} \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Im Zusammenhang mit der Wärmeleitungsgleichung tritt die Theta–Reihe dann bei J. FOURIER in *Théorie Analytique de la Chaleur* (Paris 1822) auf (vgl. I.6.7). Im Nachlass von C.F. GAUSS (*Werke III*, 436–445) fand man eine Note etwa aus dem Jahre 1808, in der eine etwas allgemeinere Reihe (nämlich die in I.6.7(1) definierte JACOBIsche Theta–Reihe $\vartheta(z;\tau)$) betrachtet und für sie bereits eine Transformationsformel bewiesen wird. In den *Fundamenta nova* wird dann von C.G.J. JACOBI (*Ges. Werke I*, 198–239) die allgemeine Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} \cos(2nx)$$

unter dem Buchstaben Θ eingeführt und zur Darstellung der elliptischen Funktionen verwendet. In der Bezeichnung von I.6.7 ist $\vartheta(\tau)$ gleich dem *Nullwert* $\vartheta(0;\tau)$.

Offenbar ist $\vartheta(\tau)$ absolut und kompakt–gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{H}$, so dass $\vartheta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Es gilt darüber hinaus

$$\vartheta(\tau + 2) = \vartheta(\tau) \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}. \tag{2}$$

Die Bedeutung und das Interesse, das die Theta–Reihe immer wieder gefunden hat, liegen nun in der so genannten

Theta–Transformationsformel:

$$\vartheta(-1/\tau) = \sqrt{\tau/i} \cdot \vartheta(\tau) \quad \textit{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}. \tag{3}$$

Dabei ist der Zweig der Wurzel zu wählen, der für positive Argumente selbst positiv ist.

Beweis. Man wendet die so genannte POISSONsche Summationsformel auf $\vartheta(iy)$, $y > 0$, an oder – was auf dasselbe hinausläuft – entwickelt die modulo 1 periodische, stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi(n+t)^2 y}, \quad t \in \mathbb{R},$$

in eine FOURIER–Reihe und erhält

$$\begin{aligned} \vartheta(iy) &= \varphi(0) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m, \\ \alpha_m &:= \int_0^1 \varphi(t)\cdot e^{-2\pi imt}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 y}\cdot e^{-2\pi imt} dt. \end{aligned}$$

Hier ist

$$\alpha_m = \beta_m(y)\cdot e^{-\pi m^2/y} \quad \text{mit} \quad \beta_m(y) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t\sqrt{y}+im/\sqrt{y}\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{y}}\cdot \beta_{m/\sqrt{y}}(1).$$

Nach dem CAUCHYschen Integralsatz hängt $\beta_m(1) = \beta$ nicht von m ab (vgl. R. REMMERT, G. SCHUMACHER [2002], 12.4.3) und man erhält

$$\vartheta(iy) = \frac{\beta}{\sqrt{y}}\cdot\vartheta\left(\frac{i}{y}\right) \quad \text{für } y > 0.$$

Setzt man nun $y = 1$, so folgt $\beta = 1$ wegen $\vartheta(iy) > 0$. Die Transformationsformel ergibt sich nun durch analytische Fortsetzung. □

Einen elementaren Beweis der POISSONschen Summationsformel findet man z. B. bei M. KOECHER [1987], 179–181.

Betrachtet man jetzt $f(\tau) := \vartheta^8(\tau)$, so erhält man in Analogie zu 2(6)

(4) $$f(\tau+2) = f(\tau) \quad \text{und} \quad f(-1/\tau) = \tau^4\cdot f(\tau).$$

Damit kennt man das Transformationsverhalten von $f = \vartheta^8$ unter der von den Modulsubstitutionen $\tau \mapsto \tau + 2$ und $\tau \mapsto -1/\tau$ erzeugten Gruppe von Automorphismen von $\mathbb{H}$. Mit der *Theta–Gruppe* Γ_ϑ in II.3.4 folgt

$$f(M\tau) = (c\tau+d)^4\cdot f(\tau) \quad \text{für alle} \quad M\in\Gamma_\vartheta.$$

Ein anderer – ebenfalls durch II.3.4 nahegelegter – Ansatz liefert eine Funktion, bei der man das Transformationsverhalten unter allen Modulsubstitutionen kennt: Man setzt

(5) $$g(\tau) := \tfrac{1}{\tau}\cdot\vartheta^2(\tau)\cdot\vartheta^2(\tau+1)\cdot\vartheta^2(1-1/\tau)$$

und verifiziert mit (2) und (3)

$$g(\tau+1) = i\cdot g(\tau) \quad \text{und} \quad g(-1/\tau) = i\cdot\tau^3\cdot g(\tau).$$

Die vierte Potenz von g ist daher eine Modulform im Sinne von 2(6) zu $k = 12$. Man vergleiche Satz 4.5 d).

§2 Dirichletsche Reihen: formale Eigenschaften

Nachdem wir die Konvergenz von Dirichletschen Reihen besprochen haben, wollen wir erläutern, wie man mit solchen Reihen umgeht – die Regeln für die Handhabung Dirichletscher Reihen sind nämlich anders als bei Potenzreihen.

Es ist klar, daß die Summe von zwei Dirichletschen Reihen die Reihe ist, deren allgemeiner Koeffizient die Summe der Koeffizienten der einzelnen Reihen ist. Wie bildet man das Produkt? Seien

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} , \quad g(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s} \tag{1}$$

zwei in einer offenen Menge U durch absolut konvergente Dirichletsche Reihen gegebene Funktionen; dann ist in U

$$\begin{aligned} f(s)\, g(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m n^{-s} m^{-s} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (nm)^{-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^{-s} , \end{aligned} \tag{2}$$

wobei

$$c_k = \sum_{\substack{n,m\geq 1 \\ nm=k}} a_n b_m = \sum_{n|k} a_n b_{k/n} \tag{3}$$

die *Faltung* der Koeffizienten $\{a_n\}$ und $\{b_m\}$ genannt wird. (Das Symbol $\sum\limits_{n|k}$ bezeichnet eine Summe über alle positiven Teiler n von k.) Das heißt, die additive Faltung $c_k = \sum\limits_{n+m=k} a_n b_m$, die die Multiplikation von Potenzreihen beschreibt, wird in der Theorie der Dirichletschen Reihen durch die multiplikative Faltung (3) ersetzt; es ist diese Tatsache, die für die große Bedeutung der Dirichletschen Reihen in der Zahlentheorie verantwortlich ist.

Wir werden nichts weiteres über die Konvergenz von $\sum c_k k^{-s}$ beweisen; man kann z.B. ohne viel Mühe zeigen, daß diese Reihe mindestens dann konvergiert, wenn beide Reihen (1) konvergieren und eine davon absolut konvergent ist.

Bespiele: a) Sei $d(n)$ die Anzahl der positiven Teiler von n. Dann ist für $\sigma > 1$

$$(4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2 ,$$

da $d(n) = \sum_{d|n} 1 \times 1$ ist.

b) Sei $\tau(n)$ die Summe der positiven Teiler von n, oder allgemeiner

$$(5) \qquad \sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

die Summe der k-ten Potenzen der positiven Teiler. Dann ist

$$(6) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\ \zeta(s-k) \qquad (\sigma > k+1) .$$

In beiden Beispielen haben die Koeffizienten die spezielle Eigenschaft, multiplikativ zu sein. Eine *multiplikative* Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist eine nicht identisch verschwindende Funktion, die

$$(7) \qquad f(mn) = f(m)f(n)$$

für alle m,n mit $(m,n) = 1$ erfüllt (eine Funktion, die (7) für alle m,n erfüllt, heißt *streng multiplikativ*). Diese Eigenschaft wirkt sich auf die entsprechenden Dirichletschen Reihen wie folgt aus: ist f multiplikativ, so ist $f(1) = 1$ (da aus (7) $f(1)^2 = f(1)$ folgt, und $f(1) = 0$ das identische Verschwinden von f implizieren würde) und

$$f(n) = f(p_1^{r_1}) \ \dots \ f(p_k^{r_k})$$

für eine Zahl n mit der Primzahlzerlegung $n = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$.
Es ist also in dem Bereich der absoluten Konvergenz von $\sum f(n)n^{-s}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \sum_{r_2,r_3,r_5,\dots} f(2^{r_2}3^{r_3}5^{r_5}\dots)\ (2^{r_2}3^{r_3}5^{r_5}\dots)^{-s}$$

(wo die Summe über alle Zuordnungen $p \mapsto r_p$ läuft mit $r_p \geq 0$ und $r_p = 0$ für alle bis auf endlich viele Primzahlen p)

$$= \sum_{r_2,r_3,r_5,\dots \geq 0} \frac{f(2^{r_2})}{2^{r_2 s}} \frac{f(3^{r_3})}{3^{r_3 s}} \frac{f(5^{r_5})}{5^{r_5 s}} \dots$$

$$= \prod_p \left[\sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \right] ,$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p läuft. Wir haben also den

<u>SATZ 1</u>: *Sei* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *eine multiplikative Funktion, und sei die Reihe*

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

absolut konvergent. Dann ist $F(s)$ *gleich dem Euler-Produkt*

$$F(s) = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) , \tag{8}$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p *läuft und auch absolut konvergiert.*

<u>Beispiele</u>: c) Für $\zeta(s)$ sind die Koeffizienten alle gleich 1, also

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \dots\right) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \qquad (\sigma > 1) . \tag{9}$$

Diese von Euler entdeckte Produktentwicklung ist der Grund für die große Rolle, die die Zetafunktion in der Primzahltheorie spielt. Außerdem lehrt sie, daß für $\sigma > 1$ die Funktion $\zeta(s)$ nie verschwinden kann (da das Produkt konvergent ist und seine einzelnen Glieder nicht Null sind). Für die in a) und b) angegebenen Reihen erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} &= \zeta(s)^2 = \prod_p (1 - p^{-s})^{-2} \\
&= \prod_p (1 + 2p^{-s} + 3p^{-2s} + \dots) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{d(p)}{p^s} + \frac{d(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) , \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} &= \zeta(s)\,\zeta(s-k) = \prod_p [(1 - p^{-s})(1 - p^{k-s})]^{-1} \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{p^{k+1}}{p^s} + \frac{p^{2k}+p^k+1}{p^{2s}} + \dots\right) \\
&= \prod_p \left(1 + \frac{\sigma_k(p)}{p^s} + \frac{\sigma_k(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right) ,
\end{aligned}$$

also sind die beiden Funktionen $n \mapsto d(n)$ und $n \mapsto \sigma_k(n)$ multiplikativ (was man auch direkt leicht sieht), da trivialerweise die Umkehrung von Satz 1 gilt: besitzt eine Dirichletsche Reihe ein Euler-Produkt (8), so stellen die Koeffizienten dieser Reihe eine multiplikative Funktion dar.

d) Für den Kehrwert $\frac{1}{\zeta(s)}$ erhalten wir