b) Ist $k > 1$ und $g \in \mathbb{Z}^n$, $g \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, mit $S[g] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 4)$, so gibt es genau $a(2, k-1)$ Linksnebenklassen $H\mathcal{U}_n$ mit den Eigenschaften

$$|\det H| = 2^k, \ H^{-1}g \in \mathbb{Z}^n, \text{ so dass } \tfrac{1}{2}S[H] \text{ gerade ist.}$$

6) Man leite das Analogon von Lemma 3 und Korollar 3 für $p = 2$ her.

7) 4(1) gilt auch für $p = 2$.

8) Für jede Primzahl p gilt $\sharp(S_8, pS_8) = 2(p+1)(p^2+1)(p^3+1) \cdot \sharp(S_8, S_8)$.

§ 4*. Harmonische Polynome und quadratische Formen höherer Stufe

In diesem Paragrafen werden zunächst die harmonischen Polynome beschrieben. Sie dienen als Hilfsmittel, um aus Theta–Reihen Spitzenformen zu gewinnen. Darüber hinaus wird gezeigt, dass Theta–Reihen zu beliebigen rationalen positiv definiten quadratischen Formen stets Modulformen zu Kongruenzuntergruppen liefern.

1. Harmonische Polynome. Sind $X_1, \ldots, X_n$ Unbestimmte über $\mathbb{C}$, so verwenden wir für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Abkürzungen

$$(1)\quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot X_n^{\alpha_n}, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!\,.$$

Für $r \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathcal{P}_r^{(n)}$ den $\mathbb{C}$–Vektorraum der *homogenen Polynome vom Grad* r in $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, also mit (1)

$$(2)\qquad \mathcal{P}_r^{(n)} = \left\{ P(X) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} p(\alpha) X^\alpha \ ; \ p(\alpha) \in \mathbb{C}, \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r \right\}.$$

Bekanntlich gilt dann

$$(3)\qquad \dim \mathcal{P}_r^{(n)} = \sharp\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \ ; \ \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = r\} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Lemma. $\{(h^t X)^r \ ; \ h \in \mathbb{R}^n\}$ *ist ein Erzeugendensystem von* $\mathcal{P}_r^{(n)}$.

Beweis. In den Standardbezeichnungen (1) und (2) definieren wir ein Skalarprodukt auf $\mathcal{P}_r^{(n)}$ durch

$$\Big\langle P(X), Q(X) \Big\rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \alpha! \cdot p(\alpha) \cdot \overline{q(\alpha)} = P\left(\left(\tfrac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial X_n} \right)^t \right) \overline{Q(X)}.$$

Insbesondere gilt dann für alle $P(X) \in \mathcal{P}_r^{(n)}$, $h \in \mathbb{R}^n$

$$\Big\langle P(X), (h^t X)^r \Big\rangle = r! \cdot P(h).$$

Sei $\mathcal{U}$ der von $(h^t X)^r$, $h \in \mathbb{R}^n$, aufgespannte $\mathbb{C}$–Unterraum von $\mathcal{P}_r^{(n)}$. Dann gilt für jedes $P(X) \in \mathcal{U}^\perp$

$$P(h) = 0 \quad \text{für alle} \;\; h \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Induktion nach n zeigt zusammen mit dem Identitätsatz sofort $P \equiv 0$, also $\mathcal{U} = \mathcal{P}_r^{(n)}$. $\square$

Wir nennen $P(X) \in \mathcal{P}_r^{(n)}$ *harmonisch*, wenn

$$\Delta P(X) \equiv 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial X_n^2} \; .$$

Δ ist also der übliche Laplace–*Operator* und

$$\mathcal{H}_r^{(n)} := \{P(X) \in \mathcal{P}_r^{(n)};\; \Delta P(X) \equiv 0\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{P}_r^{(n)}$. Offenbar gilt

$$\mathcal{H}_0^{(n)} = \mathbb{C},\; \mathcal{H}_1^{(n)} = \mathbb{C}X_1 + \ldots + \mathbb{C}X_n \;,\; \mathcal{H}_r^{(1)} = \{0\} \quad \text{für} \;\; r \geq 2.$$

Eine Beschreibung von $\mathcal{H}_r^{(n)}$ liefert nun die

Proposition. *Sei $n \geq 2$, $r \geq 1$. Dann ist*

$$\phi : \mathcal{H}_r \to \mathcal{P}_r^{(n-1)} \times \mathcal{P}_{r-1}^{(n-1)},\; P(X) \mapsto \left((P(X)\Big|_{X_n=0}, \frac{\partial (P(X))}{\partial X_n}\Big|_{X_n=0} \right) \;,$$

ein Isomorphismus der Vektorräume.

Beweis. Sei $\widetilde{X} = (X_1, \ldots, X_{n-1})^t$. Wir schreiben $P(X) \in \mathcal{P}_r^{(n)}$ in der Form

$$P(X) = \sum_{j=0}^{r} P_j(\widetilde{X}) X_n^j \;, \quad P_j(\widetilde{X}) \in \mathcal{P}_{r-j}^{(n-1)}.$$

Wegen $\Delta P_r = \Delta P_{r-1} = 0$ folgt sofort

$$\begin{aligned} \Delta P(X) \;&=\; \sum_{j=0}^{r-2} \left(\Delta P_j(\widetilde{X})\right) X_n^j + \sum_{j=2}^{r} \; j(j-1) P_j(\widetilde{X}) X_n^{j-2} \\ &=\; \sum_{j=0}^{r-2} \left[\Delta P_j(\widetilde{X}) + (j+2)(j+1) P_{j+2}(\widetilde{X})\right] X_n^j \;. \end{aligned}$$

Also ist P genau dann harmonisch, wenn

$$P_{j+2}(\widetilde{X}) = \frac{-1}{(j+2)(j+1)} \; \Delta P_j(\widetilde{X}), \;\; j = 0, \ldots, r-2,$$

und $P_0 \in \mathcal{P}_r^{(n-1)}$, $P_1 \in \mathcal{P}_{r-1}^{(n-1)}$ beliebig sind. Die Behauptung folgt nun mit

$$P_0(\widetilde{X}) = P(X)\Big|_{X_n=0},\; P_1(\widetilde{X}) = \frac{\partial P(X)}{\partial X_n}\Big|_{X_n=0}.$$

$\square$

Wegen (3) erhält man direkt das

Korollar. *Für $n \geq 2$, $r \geq 1$ gilt*

$$\dim \mathcal{H}_r^{(n)} = \binom{n+r-2}{r} + \binom{n+r-3}{r-1}.$$

Wir kommen nun zu einer nützlichen Beschreibung der harmonischen Polynome.

Satz. *Für $n \geq 2$ und $r \in \mathbb{N}_0$ sind äquivalent:*

(i) $P(X) \in \mathcal{H}_r^{(n)}$.

(ii) *$P(X)$ ist eine endliche Linearkombination über $\mathbb{C}$ von Polynomen der Form $(u^t X)^r$, wobei $u \in \mathbb{C}^n$ mit $u^t u = 0$.*

Beweis. (ii) $\Longrightarrow$ (i): Man berechnet direkt

$$\Delta(u^t X)^r = r(r-1) \cdot u^t u \cdot (u^t X)^{r-2} = 0, \quad \text{also } (u^t X)^r \in \mathcal{H}_r^{(n)}.$$

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $\mathcal{U}$ der von $(u^t X)^r$, $u \in \mathbb{C}^n$, $u^t u = 0$, aufgespannte Unterraum von $\mathcal{H}_r^{(n)}$. Für $h \in \mathbb{R}^{n-1}$ sei $\gamma = \pm i\sqrt{h^t h}$. Dann gilt

$$u = \begin{pmatrix} h \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n, \quad u^t u = 0, \quad \phi((u^t X)^r) = \left((h^t \widetilde{X})^r, \gamma r (h^t \widetilde{X})^{r-1} \right)$$

in der Bezeichnung der Proposition. Also enthält $\phi(\mathcal{U})$ die Elemente

$$((h^t \widetilde{X})^r, 0), \ (0, (g^t \widetilde{X})^{r-1}), \ \ h, g \in \mathbb{R}^{n-1},$$

und nach dem Lemma ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}_r^{(n-1)} \times \mathcal{P}_{r-1}^{(n-1)}$. Aus

$$\phi(\mathcal{U}) = \mathcal{P}_r^{(n-1)} \times \mathcal{P}_{r-1}^{(n-1)}$$

folgt $\mathcal{U} = \mathcal{H}_r^{(n)}$ mit der Proposition. □

2. Theta Reihen zu harmonischen Polynomen. Für $S \in \mathrm{Pos}\,(n; \mathbb{R})$ sei $S^{1/2}$ die eindeutig bestimmte Quadratwurzel nach 1.3(9). Ist $P(X) \in \mathcal{H}_r^{(n)}$, so definieren wir die *Theta–Reihe in S zum harmonischen Polynom* $P(X)$ durch

$$\Theta(\tau; S, P) := \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} P(S^{1/2} g)\ e^{\pi i \tau S[g]}. \tag{1}$$

Die Reihe der Absolutbeträge in (1) wird kompakt gleichmäßig in (τ, S) beschränkt durch

$$C \cdot \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} (g^t g)^{r/2} \cdot e^{-\varepsilon g^t g} < \infty, \quad C > 0, \ \varepsilon > 0.$$

Also ist $\Theta(\cdot; S, P)$ holomorph in $\tau \in \mathbb{H}$. Wegen

$$\Theta_{0,q}(\tau; S) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} e^{\pi i \tau S[g] + 2\pi i g^t q}$$

erhalten wir auch noch

$$(2) \quad \Theta(\tau; S, P) = (2\pi i)^{-r} \cdot P\left(S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\right) \Theta_{0,q}(\tau; S)\Big|_{q=0}, \qquad \tfrac{\partial}{\partial q} = \left(\tfrac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \tfrac{\partial}{\partial q_n}\right)^t.$$

Satz. *$S \in \mathrm{Pos}\,(n; \mathbb{Z})$ gerade und unimodular sowie $P(X) \in \mathcal{H}_r^{(n)}$ mit geradem $r > 0$. Dann gilt*

$$\Theta(\cdot; S, P) \in \mathbb{S}_{r+n/2}$$

mit der FOURIER*–Entwicklung*

$$(3) \qquad \Theta(\tau; S, P) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{g \in \mathcal{D}(S, 2m)} P(S^{1/2} g) \right) \cdot e^{2\pi i m \tau}.$$

Beweis. Man erhält (3) durch eine Umordnung in (1) mit $P(0) = 0$. Darüber hinaus gilt offenbar $\Theta(\tau+1; S, P) = \Theta(\tau; S, P)$. Mit Satz 2.5 ergibt sich aus (2) und der Theta–Transformati-onsformel 2.3(3) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Theta(-1/\tau; S, P) &= (2\pi i)^{-r} \cdot P\Big(S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\Big) \cdot \Theta_{0,q}(-1/\tau; S)\Big|_{q=0} \\
&= (2\pi i)^{-r} \cdot P\Big(S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\Big) \cdot \tau^{n/2} \cdot \Theta_{q,0}(\tau; S^{-1})\Big|_{q=0}.
\end{aligned}$$

Für $u \in \mathbb{C}^n$ mit $u^t u = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left(u^t S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\right)^2 e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]} \\
= \;& (2\pi i \tau) \cdot \left(u^t S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\right) \left(u^t S^{1/2} \cdot S^{-1}(g+q)\right) e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]} \\
= \;& \left(2\pi i \tau \cdot u^t S^{1/2} \cdot S^{-1} S^{1/2} u + (2\pi i \tau \cdot u^t S^{1/2} S^{-1}(g+q))^2\right) \cdot e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]} \\
= \;& (2\pi i \tau)^2 \cdot (u^t S^{1/2} S^{-1}(g+q))^2 \cdot e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]}.
\end{aligned}$$

Für $r \in \mathbb{N}$ ergibt eine Induktion

$$\left(u^t S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}\right)^r e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]} = (2\pi i)^r \cdot \left(u^t S^{1/2} S^{-1}(g+q)\right)^r \cdot e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]}.$$

Mit Satz 1 folgt daraus

$$\begin{aligned}
&P(S^{1/2}\tfrac{\partial}{\partial q}) e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]}\big|_{q=0} \\
= \;& (2\pi i \tau)^r \cdot P(S^{1/2} S^{-1}(g+q)) \cdot e^{\pi i \tau S^{-1}[g+q]}\Big|_{q=0} \\
= \;& (2\pi i \tau)^r \cdot P(S^{1/2} \cdot S^{-1} g) \cdot e^{\pi i \tau S[S^{-1} g]}.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit der Substitution $h = S^{-1}g$

$$\begin{aligned}\Theta(-1/\tau; S, P) &= \tau^{r+n/2} \cdot \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} P(S^{1/2} \cdot S^{-1}g) \cdot e^{\pi i \tau S[S^{-1}g]} \\ &= \tau^{r+n/2} \cdot \Theta(\tau; S, P).\end{aligned}$$ □

Nun betrachte man speziell für $u \in \mathbb{C}^n$

$$P(X) = (u^t X)^2 - \tfrac{1}{n}\, u^t u \cdot X^t X \in \mathcal{H}_2^{(n)} \ .$$

Setzt man jetzt $u = S^{1/2}v$, $v \in \mathbb{C}^n$, so folgt mit diesem P das

Korollar A. *Für jedes gerade, unimodulare $S \in \operatorname{Pos}(n; \mathbb{Z})$ und $v \in \mathbb{C}^n$ gilt*

$$\Theta(\tau; S, P) = \sum_{g \in \mathbb{Z}^n} ((v^t S g)^2 - \tfrac{1}{n}\, S[v] \cdot S[g]) \cdot e^{\pi i \tau S[g]} \in \mathbb{S}_{2+n/2} \ .$$

Für $n = 8, 16, 24$ gilt $\Theta(\cdot; S, P) \equiv 0$ und für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{g \in \mathcal{D}(S,2m)} (v^t S g)^2 = \tfrac{1}{n}\, S[v] \cdot \sharp(S, 2m) \ .$$

Beweis. Der Zusatz folgt aus dem Satz sowie $\mathbb{S}_6 = \mathbb{S}_{10} = \mathbb{S}_{14} = \{0\}$ gemäß III.4.2. □

Nun betrachten wir speziell $S = S_8$ aus 2.5(1).

Korollar B. *Für jedes $v \in \mathbb{C}^8$ gilt*

$$\sum_{g \in \mathbb{Z}^8} ((v^t S_8 g)^8 - \tfrac{1}{128}\, (v^t S_8 v)^4 (g^t S_8 g)^4) \cdot e^{\pi i \tau S_8[g]} = c_v \cdot \Delta^*(\tau)$$

mit

$$c_v = \left(\sum_{g \in \mathcal{D}(S_8,2)} (v^t S_8 g)^8 \right) - 30 (v^t S_8 v)^4 \ .$$

Beweis. Für $u \in \mathbb{C}^8$ verifiziert man leicht $P(X) \in \mathcal{H}_8^{(8)}$ für

$$\begin{aligned}P(X) &= (u^t X)^8 - \tfrac{7}{5}(u^t u) \cdot (u^t X)^6 \cdot (X^t X) + \tfrac{7}{12}(u^t u)^2 \cdot (u^t X)^4 \cdot (X^t X)^2 \\ &\quad - \tfrac{7}{96}(u^t u)^3 \cdot (u^t X)^2 \cdot (X^t X)^3 + \tfrac{1}{768}(u^t u)^4 \cdot (X^t X)^4 \ .\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{S}_{12} = \mathbb{C}\Delta^*$ folgt mit dem Satz

$$\Theta(\tau; S_8, P) = c_u\, \Delta^*(\tau), \quad c_u = \sum_{g \in \mathcal{D}(S_8,2)} P(S_8^{1/2} g).$$

Nun betrachte man

$$\begin{aligned}
Q(X) = \;& (u^tX)^6 - \tfrac{15}{16}(u^tu)\cdot(u^tX)^4\cdot(X^tX) + \tfrac{45}{224}(u^tu)^2\cdot(u^tX)^2\cdot(X^tX)^2 \\
& -\tfrac{5}{896}(u^tu)^3\cdot(X^tX)^3 \in \mathcal{H}_6^{(8)}, \\
Q(X) = \;& (u^tX)^4 - \tfrac{1}{2}(u^tu)\cdot(u^tX)^2\cdot(X^tX) + \tfrac{1}{40}(u^tu)^2\cdot(X^tX)^2 \in \mathcal{H}_4^{(8)} \\
Q(X) = \;& (u^tX)^2 - \tfrac{1}{8}(u^tu)\cdot(X^tX) \in \mathcal{H}_2^{(8)}.
\end{aligned}$$

Wegen $\mathbb{S}_6 = \mathbb{S}_8 = \mathbb{S}_{10} = \{0\}$ folgt $\Theta(\cdot; S_8, Q) \equiv 0$ für diese Q. Aus der FOURIER–Entwicklung in Korollar A ergibt sich dann auch

$$\sum_{g\in\mathbb{Z}^8} (S_8[g])^r Q(S^{1/2}g)\cdot e^{\pi i\tau S[g]} \equiv 0 \quad \text{für } \ r \in \mathbb{N}_0.$$

Durch Bildung geeigneter Linearkombinationen folgt schließich

$$\Theta(\tau; S_8, P) = \sum_{g\in\mathbb{Z}^8}\Big((u^tS_8^{1/2}g)^8 - \tfrac{1}{128}(u^tu)^4(g^tS_8g)^4\Big)\cdot e^{\pi i\tau S_8[g]}.$$

Nun setzt man $u = S^{1/2}v$ und benutzt $\sharp(S_8, 2) = 240$ gemäß Korollar 2.6A. □

Wählt man speziell $v \in \mathcal{D}(S_8, 2)$, so kann man zeigen, dass

$$\sum_{g\in\mathcal{D}(S_8,2)} (v^tS_8g)^8 = 624$$

gilt, also $c_v = 144$ in Korollar B. Dann ergibt ein Vergleich der FOURIER–Koeffizienten in Korollar B zusammen mit Korollar 2.6A das

Korollar C. *Ist $v \in \mathcal{D}(S_8, 2)$, so gilt für alle $m \in \mathbb{N}$*

$$\left(\sum_{g\in\mathcal{D}(S_8,2m)} (v^tS_8g)^8\right) - 480\cdot m^4\cdot\sigma_3(m) = 144\cdot\tau(m)\ .$$

Bemerkungen a) Die Ergebnisse dieses Paragrafen gehen auf E. HECKE (*Math. Werke*, 789–918) zurück.
b) Korollar A ist ein wesentliches Hilfsmittel bei der Klassifikation der 24–dimensionalen, geraden, unimodularen Gitter durch B.B. VENKOV (vgl. J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE [1999], chap. 18).

3. Die Stufe einer geraden Matrix. Sei $S \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Z})$ gerade mit $\det S \neq 0$. Dann heißt

(1) $$N := \min\{q \in \mathbb{N}\ ;\ qS^{-1} \text{ gerade}\}$$

die *Stufe von S*. Wegen $S^{-1} \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Q})$ existiert dieses N und NS^{-1} ist gerade. Die wesentlichen Eigenschaften formulieren wir in dem