NAME:	AUFGABE 1	

1. (a) Sei $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und $a_\infty \in \mathbb{C}$.
   Wie definiert man $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_\infty$?

   (b) Wir betrachten $\mathbb{Q}[i] = \{p + iq; p, q \in \mathbb{Q}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$.

   Beweisen oder widerlegen Sie:

   Wenn $\alpha \in \mathbb{Q}[i]$ *und* $\beta \in \mathbb{Q}[i] \setminus \{0\}$, *dann gilt* $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}[i]$.

NAME: AUFGABE 2

2. Wir betrachten die Folge $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ definiert durch $b_0 = 1$ und

$$b_{n+1} = f(b_n) \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots \ ,$$

mit $f(x) = \frac{2}{3}\left(x + x^{-2}\right)$.

Zeigen/begründen Sie folgende Aussagen[1]:

(1) $b_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $b_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ für $x \in [1, 2]$.

(4) $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{2}{3}\,|b_n - b_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

(5) $|b_m - b_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |b_{k+1} - b_k| \leq 3\,|b_{n+1} - b_n|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ mit $m \geq n$.

Fortsetzung folgt in Aufgabe 3.

[1] Sie dürfen in Ihrem Beweis von (j+1) benutzen, dass (1),...,(j) gültig sind.

NAME:	AUFGABE 3	

Wir setzen Aufgabe 2 fort. Zeigen/begründen Sie folgende Aussagen[2]:

(6) $|b_m - b_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq n$.

(7) $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy-Folge.

(8) $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

Beantworten Sie folgende Fragen:

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

(b) Kann man $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ berechnen ohne (1)-(8)?

[2]Sie dürfen in Ihrem Beweis von (j+1) benutzen, dass (1),...,(j) gültig sind.

Name: | Aufgabe 4

4. Zwei Lösungen von

$$z^4 - 2z^3 + (5 - 2i)\, z^2 + 4iz - 10i = 0$$

sind $z = 1 + i$ und $z = -1 - i$. Geben Sie alle übrigen Lösungen $z \in \mathbb{C}$.

Hinweis: $(z - (1 + i))\,(z - (-1 - i)) = z^2 - 2i$.

Name:	Aufgabe 5	

5. Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2^n + n^2}\; z^n$.

   (a) Welchen Konvergenzradius hat diese Reihe?

   (b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert/divergiert diese Reihe?

NAME:	AUFGABE 6	

6. (a) Wie definiert man für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Differenzierbarkeit in $a \in \mathbb{R}$?

   (b) Berechnen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ derartig, dass $g(x) = |\sin x| - |ax + b|$ differenzierbar ist auf $(0, 2\pi)$.

Name:	Aufgabe 7	

7. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

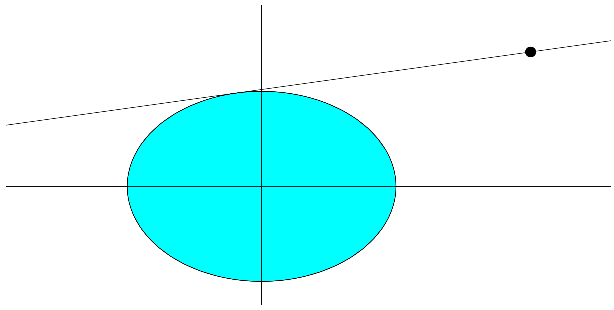
$$f(x) = \arctan(x) + \exp(x)$$

eine Inverse $f^{inv} : (a, b) \to \mathbb{R}$ hat.

Berechnen Sie a und b.

NAME: AUFGABE 8

8. Berechnen Sie eine Gerade, die eine Tangente ist an der oberen Seite der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 4$ und die durch den Punkt $(x, y) = (4, 2)$ geht. Als Hinweis ein Bild dazu:



NAME:

AUFGABE 9

9. Wir betrachten $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(\ln x)$.

   (a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiter Ordnung $t_2(x)$ bei $x = e$.

   (b) Geben Sie den Restterm von Lagrange für $f(x) - t_2(x)$.

Name:	Aufgabe 10	

10. Sind folgende Integrale definiert als eigentliches Riemann-Integral?
Wenn ja, berechnen Sie den Wert.

(a) $\int_0^\pi \arcsin(\sin x)\, dx$;

(b) $\int_0^\pi \tan(x) dx$;

(c) $\int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.