Analysis 1
Aufgaben zum Üben

Aufgabe 1: (a) Bestimmen Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$z^4 + z^3 - 3z^2 - 17z - 30 = 0$$

Hinweis: $-1 + 2i$ ist eine Lösung.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$(z-3)^4 = -16$$

Aufgabe 2: Sei $z = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{75}}{2}$

(a) Berechnen Sie $|z|$

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Arg}(z)$

(c) Berechnen Sie $\frac{z^{302}}{25^{150}}$.

Aufgabe 3: (a) Geben Sie den Haupsatz der Differential- und Integralrechnung an.

(b) Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differentialrechnung) an.

(c) Geben Sie die Definition der folgenden Aussage an:

$(a_n) \subset \mathbb{R}$ ist keine Cauchyfolge.

Aufgabe 4: Wir betrachten die Funktion $g : [0,1] \to [0,1]$,

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(a) Ist die Funktion injektiv, surjektiv, bijektiv?

(b) Zeigen Sie mit dem Epsilon-Delta-Kriterium, dass die Funktion in jedem Punkt $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ unstetig ist.

(c) Zeigen Sie mit dem Epsilon-Delta-Kriterium, dass die Funktion im Punkt $x = \frac{1}{2}$ stetig ist.

Aufgabe 5: Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung der Funktion $f(x) = \tan(x)$ um den Punkt $x = \frac{\pi}{3}$.

Aufgabe 6: Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 1} \frac{\arctan(x) - \sqrt{6 + 3x} + 3 - \frac{\pi}{4}}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 7: Gegeben Sei die Folge $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k+0}, & n = 4k \\ \frac{1}{k+3}, & n = 4k+1 \\ \frac{1}{k+1}, & n = 4k+2 \\ \frac{1}{k+2}, & n = 4k+3 \end{cases}$

(a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n a_n$ absolut?

(b) Konvergiert die Reihe?

Aufgabe 8: Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3+4i)^n}{3^n - in^2} z^n$$

konvergiert.

Aufgabe 9: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweisen oder widerlegen Sie:

$|f(x)|$ ist an der Stelle a genau dann differenzierbar, wenn $f(a) \neq 0$ oder $f'(a) = 0$ ist.

Aufgabe 10: Gegeben sei die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Bereich $A \subset \mathbb{R}$, so dass $\cosh(x)$ auf A invertierbar ist und $-1 \in A$ gilt.

(b) Wir definieren $g(x) : B \to A$ als die Umkehrfunktion, der auf die Menge A eingeschränkten Funktion $\cosh(x)$. Bestimmen Sie B.

(c) Berechnen Sie $g'(x)$.

Aufgabe 11: Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} -\frac{2\,(x+11)}{x^2+x-12}dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\frac{17}{2}}^{\frac{17}{2}} \sin(x^3 e^{x^2})dx$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{y} \sin^2(x)dx, \quad y > 0$

Veranstaltungshomepage: **http://www.mi.uni-koeln.de:8914**