Prof. Dr. Guido Sweers
Jan M. Krämer

WS 2013/2014

Analysis 1
Übungsblatt 0

Aufgabe 1. Seien A, B, C beliebige Aussagen. Welche der folgenden Aussagen sind immer wahr?

(a) $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big((\neg A) \Rightarrow (\neg B)\big)$

(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big)$

(c) $\big(\neg(A \Rightarrow B)\big) \Leftrightarrow \big((\neg B) \Rightarrow (\neg A)\big)$

(d) $\Big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\Big) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

(e) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \wedge (B \Rightarrow C))$

(f) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow A$

(g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \big(A \vee (\neg B)\big)$

(h) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow \big(A \vee B\big)$

(i) $\Big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\Big) \Rightarrow (A \wedge B)$

(j) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \big((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)\big)$

(k) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

(l) $\Big(A \vee (B \wedge C)\Big) \Leftrightarrow \Big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\Big)$

(m) $\big(A \wedge (B \vee C)\big) \Leftrightarrow \big((A \wedge B) \vee (A \wedge C)\big)$

Aufgabe 2. Zeigen Sie die De Morganschen Regeln:

(a) Für beliebige Aussagen a, b gilt

$$(\neg(a \wedge b)) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$$
$$(\neg(a \vee b)) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$$

Hinweis: Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle.

(b) Für beliebige Mengen $A, B \subset M$ gilt

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

wobei das Komplement einer Menge $S \subset M$ als $S^c := M \setminus S$ definiert ist.

(c) Stellen Sie die De Morganschen Regeln für Mengen anschaulich in einer Skizze dar.

Aufgabe 3. Entscheiden Sie den Wahrheitsgehalt der folgenden Aussagen.

(a) Wenn Deutschland in Asien liegt, dann ist $\pi = 3$.

(b) Deutschland liegt in Asien genau dann, wenn $\pi = 3$.

(c) Wenn die Sonne scheint, dann ist es warm.

(d) Wenn Hans mit Eva verwandt ist und Eva mit Dirk verwandt ist, dann ist auch Hans mit Dirk verwandt. Gemeint ist hier biologische Verwandschaft.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ und (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Aufgabe 5. Finden Sie äquivalente Darstellungen der folgenden Aussagen, wobei ausschließlich A,B,(,),$\neg$ und $\vee$ benutzt werden darf.

(a) $A \Rightarrow B$

(b) $A \Leftrightarrow B$

(c) $\neg(A \Rightarrow B)$

(d) $\neg(A \Leftrightarrow B)$

(e) $A \wedge B$

(f) $\neg(A \wedge B)$

Aufgabe 6. (a) Sei G eine Gruppe von Menschen, für Personen $A, B \in G$ definieren wir $A \sim B :\Leftrightarrow$ A mag B.

Formulieren Sie die folgenden Aussagen in normaler Sprache. Welche sind äquivalent? Wie sieht die Negation der Aussagen aus und wie würde man die Negation in normaler Sprache formulieren?

a) $\forall_{A\in G}\forall_{B\in G} : A \sim B$

b) $\forall_{B\in G}\forall_{A\in G} : A \sim B$

c) $\forall_{A\in G}\exists_{B\in G} : A \sim B$

d) $\forall_{B\in G}\exists_{A\in G} : A \sim B$

e) $\exists_{A\in G}\forall_{B\in G} : A \sim B$

f) $\exists_{B\in G}\forall_{A\in G} : A \sim B$

g) $\exists_{A\in G}\exists_{B\in G} : A \sim B$

h) $\exists_{B\in G}\exists_{A\in G} : A \sim B$

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$, wenn folgende Aussage gilt:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{y\in\mathbb{R}} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wie zeigt man, dass eine Funktion nicht stetig in x ist, d.h. die Negation der oberen Aussage?

(c) Verneinen Sie die folgende Aussage: Auf jedem Kontinent gibt es Land, in dem in jeder Stadt ein Mensch lebt, der von allen Verwandten gelobt wird, wenn er für Sie kocht.

Aufgabe 7. Jemand zeigt Ihnen den folgenden Beweis, was sagen Sie dazu?

Satz: Alle Menschen in einer Gruppe von n Personen haben die gleiche Augenfarbe.

Beweis: Vollständige Induktion.

Im Fall $n = 1$ ist die Aussage trivial. Sei die Aussage nun für die natürliche Zahl n gültig.

Betrachten wir eine Gruppe mit $n + 1$ Menschen, diese kann man in 2 Mengen mit jeweils n Elementen aufteilen. Diese haben aber nach Induktionsvoraussetzung die gleiche Augenfarbe und da sich die Mengen überschneiden, müssen alle Menschen in der Gruppe mit $n+1$ Menschen die gleiche Augenfarbe haben. Damit ist der Satz durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 8. Versuchen Sie den folgenden "Beweis" zu verstehen. Was ist hierbei problematisch?

Die Aussage A sei definiert als:

Wenn A wahr ist, dann existiert der Weihnachtsmann.

Satz: A ist wahr.

Beweis: Um die Aussage zu zeigen, nehmen wir an, dass A wahr ist. Wir müssen zeigen, dass der Weihnachtsmann existiert. Da A nach Annahme wahr ist, gilt also, dass wenn A wahr ist, der Weihnachtsmann existiert. Diese Aussage können wir benutzen, da die Voraussetzung, dass A wahr ist, nach Annahme erfüllt ist. Also existiert der Weihnachtsmann. Das war zu zeigen.

Folgerung: Der Weihnachtsmann existiert.

Beweis: Nach dem Satz ist A wahr. Also gilt, dass wenn A wahr ist, der Weihnachtsmann existiert. Die Voraussetzung ist nach dem Satz aber erfüllt. Also existiert der Weihnachtsmann.

Aufgabe 9. Sei $M := \{S \text{ ist ein Menge} \mid S \notin S\}$ die Menge aller Mengen, die sich nicht als Element enthalten.

(a) Untersuchen Sie, ob $(M \notin M)$ gilt.

(b) Untersuchen Sie, ob $(M \in M)$ gilt.

(c) Was folgern Sie daraus?

Etwas unpräziser formuliert man dies auch als Barbier, der alle Personen rasiert, die sich nicht selber rasieren. Rasiert sich der Barbier?