

Analysis 1
Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv, bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = 2x$

(b) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, f(x) = 2x$

(c) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = |x|$

(d) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = |x|$

(e) $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}, n > 0$ gelten.

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(b) $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2$

(c) $\prod_{k=0}^{n-1} (1 + x^{2^k}) = \sum_{m=0}^{2^n-1} x^m$ für alle $x > 0$.

Aufgabe 3. (a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x^n > y^n \Leftrightarrow x > y?$$

Beweisen Sie Ihre Behauptung.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| > y \Leftrightarrow -x < y < x$$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie jeweils, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Aussage gilt (und definiert ist).

(a) $x^2 < x$

(d) $|4x - 4| > 2x + 3$

(b) $x^2 + 4x - 5 > 0$

(e) $\frac{x^2 + 2x + 10}{x^2 + 3x - \frac{55}{4}} > 0$

(c) $|x - 1| < 2$ und $|x + 4| > 6$

Aufgabe 5.

(a) Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

a) $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$

c) $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1\}$

d) $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^4 \leq 1\}$

(b) Tragen Sie 1, 2, 3, 4 so ein, dass die folgende Aussage gilt:

$$A_{\dots} \subset A_{\dots} \subset A_{\dots} \subset A_{\dots}$$